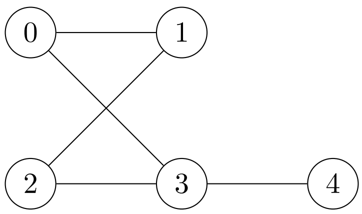
EDHEC 2023 – Mathématiques appliquées

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les bibliothèques `numpy`, `numpy.random` et `numpy.linalg` de `Python` sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.
2. (a) Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

   (b) On considère la fonction `Python` suivante :

```
def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N
```

   On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,------)
n=B[------]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2.(a).

3. On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1;5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.
   (a) Déterminer la matrice D.
   (b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?
4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.
Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) On identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la question ${}^tXLX$?
   (b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a :
$$ {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 $$
   (c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.
   (d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.
5. (a) À l'aide de la question 3.(b), montrer l'équivalence :
$$ LX = 0 \Longleftrightarrow X \in Vect(U) $$
   (b) Conclure que $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

1. Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0;1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :
$$ |f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x - y| \qquad (*) $$
On considède pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente. On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$
   (b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.
   (c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.
5. On désigne par n et p des entiers naturels, avec $p \geqslant 1$.
   (a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.
   (b) En déduire l'inégalité :
   $$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K}|u_1 - u_0|$$
   (c) Établir enfin l'inégalité suivante :
   $$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$
6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$$
   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t.
   (b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$$
   (c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.
   (d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.
   (e) Compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :
   ```
   def suite(n):
       u=------
       for k in range(1,n+1):
           u=------
       return u
   ```
   (f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5.(c), établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant \dfrac{2000}{3}$.
   (g) En déduire un programme `Python`, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 3

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.
   (b) En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
   (b) Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.
   (d) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.
3. On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivante la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (a) Établir l'égalité :
   $$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$
   (b) En déduire explicitement $P(X = Y)$.
4. Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer la probabilité p pour que $A(X, Y)$ ne soit pas diagonalisable.
   (b) On considère le script `Python` suivant :

```
m=int(input("Entrez une valeur entière pour m : "))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

   Pour de grandes valeurs de l'entier naturel `m`, de quel réel le contenu de la variable `i` est-il proche ?

Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.
2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.
   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty;1[$, strictement positive et continue sur $[1;+\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. (a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

   (b) Justifier que G est de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

   (c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ qui, à tout réel t de $]1;+\infty[$, associe $y(t)$.
   On note (E_1) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 1$.
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.
   (b) En notant K la constante évoquée à la question 6.(a), donner toutes les solutions de (E_1).
   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).
   (d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \iff h - u$ est solution de (E_1).
   (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :
$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$
7. (a) Montrer finalement que l'on a :
$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$
   (b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1;+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.