

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Si q est un nombre réel et si $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leq n$, on a

$$\bullet \sum_{k=m}^n k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=m}^n q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$

c) $\sum_{k=1}^n (3k+n-1)$

b) $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

d) $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$

Calcul 18.2



Même exercice.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$

e) $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

c) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$

f) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

Calcul 18.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geq q$.

a) $\prod_{k=p}^q 2$

b) $\prod_{k=1}^n 3^k$

d) $\prod_{k=-10}^{10} k$

Changements d'indice

Calcul 18.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$

complément c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$

b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

complément **Calcul 18.6 — Produits télescopiques.**



Calculer les produits suivants.

a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$

c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$

d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Décomposition en éléments simples

Calcul 18.7



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Sommation par paquets

complément Calcul 18.8



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

complément Sommes doubles

Calcul 18.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$