Soutien - dérivées

Dans cette fiche, on calculera $f'(x)$ sans étudier là où f est dérivable.

Fonction	Dérivée
$a,\ a \in \mathbb{R}$	0
x	1
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Fonction	Dérivée
$au,\ a \in \mathbb{R}$	au'
$u+v$	$u'+v'$

Exemple

Si $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x}$.

Méthode 1

- Si $f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$ alors $f'(x) = -px^{-p-1} = \dfrac{-p}{x^{p+1}}$.
- Si $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple

Si $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $f(x) = x^{-3}$ donc $f'(x) = (-3) \times x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$.

Exercice 1

$f(x) = 3x+2$ $\quad f(x) = x^5$ $\quad f(x) = -7x+2$ $\quad f(x) = 3$

$f(x) = 4 - \dfrac{x}{3}$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{2}+1$ $\quad f(x) = 3x^2-2x+1$ $\quad f(x) = x^2 - \sqrt{x}$

$f(x) = \frac{3x^5-4x^3}{2}$ $\quad f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ $\quad f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{x^2}{4}$ $\quad f(x) = e^x + \ln x$

$f(x) = 5e^x$ $\quad f(x) = \dfrac{\ln x}{2}$ $\quad f(x) = 2x+1+\dfrac{e^x}{5}$ $\quad f(x) = 3x^7 + 2\ln x$

$f(x) = 3\sqrt{x}$ $\quad f(x) = \dfrac{2}{x^4}$ $\quad f(x) = \dfrac{\ln(x)}{6}$ $\quad f(x) = \dfrac{2}{x}$

Produit, inverse, quotient

$(u \times v)' = u'v + uv'$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $\qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemple

Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x \quad u'(x) = e^x$

$v(x) = x^2+1 \quad v'(x) = 2x$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{e^x \times (x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2-2x+1)e^x}{(x^2+1)^2}$

Exercice 2

$f(x) = (1-2x)(x^3-4)$ $\quad f(x) = x^2\ln(x)$ $\quad f(x) = e^x(2x^2-7x)$

$f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^5}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{1-x}{2x-5}$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{e^x+1}$ $\quad f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice 3 : Pêle mêle

$f(x) = x^3 + 3x$ $\quad f(x) = x^2 e^x$ $\quad f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$

$f(x) = \dfrac{5e^x}{x - e^x}$ $\quad f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{x}{5}$ $\quad f(x) = 2x + 1 + \dfrac{e^x}{5}$

$f(x) = \dfrac{1}{2x^4}$ $\quad f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$ $\quad f(x) = 4 - \dfrac{\ln(x)}{3}$

$f(x) = x \ln x$ $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$ $\quad f(x) = \dfrac{x - e^x}{5}$

Dérivées composées

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}, \qquad (e^u)' = u'\,e^u, \qquad (u^2) = 2\,u'\,u$

Si $f(x) = g(ax+b)$, alors $f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Exemple

Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{4-5x}$ et de $g(x) = (\ln x)^2$.

- f est de la forme $g(ax+b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$, $a = -5$ et $b = 4$
  $f'(x) = ag'(ax+b)$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x) = -5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4-5x}} = \dfrac{-5}{2\sqrt{4-5x}}$.
- $g(x) = (\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$.
  On a $(u^2)' = 2u'u$ donc $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$.

Exercice 4

$f(x) = e^{3x^2}$ $\quad f(x) = \ln(x^2+1)$ $\quad f(x) = \sqrt{8x+1}$

$f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^4}$ $\quad f(x) = \sqrt{1-2x}$ $\quad f(x) = (2 + \ln x)^2$

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$ $\quad f(x) = \ln(1+e^x)$

Utilisation de plusieurs formules

Exemple

Calculer la dérivée de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

u est de la forme $\dfrac{U}{V}$ avec $U(x) = x^2+1 \quad U'(x) = 2x$

$V(x) = x^2 - 1 \quad V'(x) = 2x$

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$ donc $u'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ donc $f'(x) = \dfrac{\frac{-4x}{(x^2-1)^2}}{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} \times \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$

Exercice 5

$f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{x^2}$ $\quad f(x) = 2xe^{1/x}$ $\quad f(x) = \dfrac{3e^{-x}}{e^{2x}+4}$ $\quad f(x) = \ln(\sqrt{1+2x} - 1)$

Erreurs à ne pas commettre :

- Ne pas écrire $f'(x) = u'v + uv'$: soit on met des x partout, soit on en met nulle part.

Ecrire : $f' = u'v + uv'$ ou $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

- De même, ne pas écrire $u = 3x - 1$ et $u' = 3$ mais $u(x) = 3x - 1$ et $u'(x) = 3$.

- Ecrire $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ est un abus de notation que vous ne devez pas utiliser !

$\ln x$ n'est pas une fonction !!

- Si $f(x) = \dfrac{e^x + x}{2}$, ce n'est pas la peine d'utiliser $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$: 2 est une constante !!

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

lien1 + Dérivée des fonctions composées : lien2

Révisions-dérivées : Correction

Exercice 1

$f(x)=3x+2$	$f'(x)=3$	$f(x)=x^5$	$f'(x)=5x^4$
$f(x)=-7x+2$	$f'(x)=-7$	$f(x)=3$	$f'(x)=0$
$f(x)=4-\dfrac{x}{3}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{3}$	$f(x)=\dfrac{x}{2}+1$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}$
$f(x)=3x^2-2x+1$	$f'(x)=6x-2$	$f(x)=x^2-\sqrt{x}$	$f'(x)=2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\dfrac{3x^5-4x^3}{2}$	$f'(x)=\dfrac{15x^4-12x^2}{2}$	$f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=2+\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{x^2}{4}$	$f'(x)=\dfrac{-8}{x^3}-\dfrac{x}{2}$	$f(x)=e^x+\ln x$	$f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$
$f(x)=5e^x$	$f'(x)=5e^x$	$f(x)=\dfrac{\ln x}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2x}$
$f(x)=2x+1+\dfrac{e^x}{5}$	$f'(x)=2+\dfrac{e^x}{5}$	$f(x)=3x^7+2\ln x$	$f'(x)=21x^6+\dfrac{2}{x}$
$f(x)=3\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\dfrac{2}{x^4}=2x^{-4}$	$f'(x)=\dfrac{-8}{x^5}$
$f(x)=\dfrac{\ln(x)}{6}$	$f'(x)=\dfrac{1}{6x}$	$f(x)=\dfrac{2}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-2}{x^2}$

Exercice 2

• $f(x)=(1-2x)(x^3-4)$. f est de la forme $u\times v$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=1-2x \text{ et} & v(x)=x^3-4 \\ u'(x)=-2 & v'(x)=3x^2 \end{array}$

$$\begin{aligned}(uv)'=u'v+uv' \text{ donc } f'(x)&=-2\times(x^3-4)+(1-2x)\times 3x^2=-2x^3+8+3x^2-6x^3\\ &=-8x^3+3x^2+8\end{aligned}$$

• $f(x)=x^2\ln(x)$. f est de la forme $u\times v$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=x^2 \text{ et} & v(x)=\ln(x) \\ u'(x)=2x & v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$

$(uv)'=u'v+uv'$ donc $f'(x)=2x\times\ln(x)+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln(x)+x$.

• $f(x)=e^x(2x^2-7x)$. f est de la forme $u\times v$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=e^x \text{ et} & v(x)=2x^2-7x \\ u'(x)=e^x & v'(x)=4x-7 \end{array}$

$$\begin{aligned}(uv)'=u'v+uv' \text{ donc } f'(x)&=e^x\times(2x^2-7x)+e^x\times(4x-7)=e^x(2x^2-7x+4x-7)\\ &=e^x(2x^2-3x-7)\end{aligned}$$

• $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$. f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=\ln x$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Comme $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$, on a $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{-1}{x\,(\ln x)^2}$.

• $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^5}=(x^2-1)^{-5}$. f est de la forme u^{-5} avec $u(x)=x^2-1$ et $u'(x)=2x$.

Comme $(u^{-5})'=-5u'u^{-6}=\dfrac{-5u'}{u^6}$, on a $f'(x)=\dfrac{-5\times 2x}{(x^2-1)^6}=\dfrac{-10x}{(x^2-1)^6}$.

• $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Comme $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$, on a $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

• $f(x)=\dfrac{1-x}{2x-5}$. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=1-x \text{ et} & v(x)=2x-5 \\ u'(x)=-1 & v'(x)=2 \end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{(-1)\times(2x-5)-(1-x)\times 2}{(2x-5)^2}=\dfrac{-2x+5-2+2x}{(2x-5)^2}=\dfrac{3}{(2x-5)^2}$

• $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=x \text{ et} & v(x)=e^x+1 \\ u'(x)=1 & v'(x)=e^x \end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{1\times(e^x+1)-x\times e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$.

• $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=\ln x \text{ et} & v(x)=x \\ u'(x)=\frac{1}{x} & v'(x)=1 \end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Exercice 3

• $f(x)=x^3+3x$ donc $f'(x)=3x^2+3$

• $f(x)=x^2e^x$ est de la forme uv avec $\begin{array}{ll} u(x)=x^2 \text{ et} & v(x)=e^x \\ u'(x)=2x & v'(x)=e^x \end{array}$

$(uv)'=u'v+uv'$ donc $f'(x)=2x\times e^x+x^2\times e^x=(2x+x^2)e^x$

• $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$. f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=2x+1$ et $u'(x)=2$.

Comme $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$, on a $f'(x)=\dfrac{-6}{(2x+1)^2}$

• $f(x)=\dfrac{5e^x}{x-e^x}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=5e^x \text{ et} & v(x)=x-e^x \\ u'(x)=5e^x & v'(x)=1-e^x \end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{5e^x.(x-e^x)-5e^x(1-e^x)}{(x-e^x)^2}=\dfrac{5e^x(x-1)}{(x-e^x)^2}$

- $f(x)=\dfrac{5}{x}+\dfrac{x}{5}$ donc $f'(x)=\dfrac{-5}{x^2}+\dfrac{1}{5}$
- $f(x)=2x+1+\dfrac{e^x}{5}$ donc $f'(x)=2+\dfrac{e^x}{5}$
- $f(x)=\dfrac{1}{2x^4}=\dfrac{1}{2}.x^{-4}$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times(-4)\times x^{-5}=\dfrac{-2}{x^5}$
- $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}\times\ln x$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln 2}$.
- $f(x)=4-\dfrac{\ln(x)}{3}=4-\dfrac{1}{3}\ln x$ donc $f'(x)=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1}{3x}$
- $f(x)=x\ln x$ est de la forme uv avec $\begin{array}{ll} u(x)=x \text{ et} & v(x)=\ln x \\ u'(x)=1 & v'(x)=\frac{1}{x}\end{array}$

$(uv)'=u'v+uv'$ donc $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

- $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=x+1 \text{ et} & v(x)=e^x \\ u'(x)=1 & v'(x)=e^x\end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{x\,e^x}{e^{2x}}$

- $f(x)=\dfrac{x-e^x}{5}$ donc $f'(x)=\dfrac{1-e^x}{5}$

Exercice 4

- $f(x)=e^{3x^2}$. f est de la forme e^u avec $u(x)=3x^2$ et $u'(x)=6x$.

Comme $(e^u)'=u'e^u$, on a $f'(x)=6x\,e^{3x^2}$.

- $f(x)=\ln(x^2+1)$. f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$.

Comme $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, on a $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

- $f(x)=\sqrt{8x+1}$. f est de la forme $g(ax+b)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$, $a=8$ et $b=1$.

$f'(x)=ag'(ax+b)$ et comme $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a $f'(x)=\dfrac{8}{2\sqrt{8x+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{8x+1}}$.

- $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^4}=(2-x)^{-4}$. f est de la forme $g(ax+b)$ avec $g(x)=x^{-4}$.

Comme $g'(x)=-4x^{-5}=\dfrac{-4}{x^5}$, on a $f'(x)=\dfrac{-4\times(-1)}{(2-x)^5}=\dfrac{4}{(2-x)^5}$.

- $f(x)=\sqrt{1-2x}$. f est de la forme $g(ax+b)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$, $a=-2$ et $b=1$.

$f'(x)=ag'(ax+b)$ et comme $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a $f'(x)=\dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$.

- $f(x)=(2+\ln x)^2$. f est de la forme u^2 avec $u(x)=2+\ln x$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Comme $(u^2)'=2u'u$, on a $f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times(2+\ln x)=\dfrac{2}{x}(2+\ln x)$

- $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. f est de la forme e^u avec $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et $u'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

Comme $(e^u)'=u'e^u$, on a $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\,e^{1/x}=-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

- $f(x)=\ln(\sqrt{x}+1)$. f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=\sqrt{x}+1$ et $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Comme $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, on a $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2x+2\sqrt{x}}$.

- $f(x)=\ln(1+e^x)$. f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=1+e^x$ et $u'(x)=e^x$.

Comme $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, on a $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Exercice 5

- $f(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{x^2}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=e^{2x+1} \text{ et} & v(x)=x^2 \\ u'(x)=2e^{2x+1} & v'(x)=2x\end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{2e^{2x+1}x^2-2xe^{2x+1}}{x^4}=\dfrac{2(x-1)e^{2x+1}}{x^3}$

- $f(x)=2xe^{1/x}$ est de la forme uv avec $\begin{array}{ll} u(x)=2x \text{ et} & v(x)=e^{1/x} \\ u'(x)=2 & v'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{1/x}\end{array}$

$(uv)'=u'v+uv'$ donc $f'(x)=\left(2-\dfrac{2}{x}\right)e^{1/x}$

- $f(x)=\dfrac{3e^{-x}}{e^{2x}+4}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=3e^{-x} \text{ et} & v(x)=e^{2x}+4 \\ u'(x)=-3e^{-x} & v'(x)=2e^{2x}\end{array}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{-3e^{-x}.(e^{2x}+4)-3e^{-x}.2e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2}=\dfrac{-6e^x-12e^{-x}}{(e^{2x}+4)^2}$

- $f(x)=\ln(\sqrt{1+2x}-1)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=\sqrt{1+2x}-1$.

$\sqrt{1+2x}$ est de la forme $g(ax+b)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$, $a=2$ et $b=1$.

Comme $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ on a $u'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

Comme $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, on a $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}+1}=\dfrac{1}{1+2x+\sqrt{1+2x}}$