Equations, inéquations, études de signe

Pour les équations et inéquations avec des ln / exp, voir fiche « Exponentielle et logarithme »

➢ Equation

Méthode 1 - Résolution d'équation

1. On cherche les valeurs interdites.
2. On isole l'inconnue en écrivant le symbole $\Leftrightarrow$ entre chaque équation.
3. On vérifie si les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites et on donne l'ensemble des solutions sous la forme $\mathcal{S} = \{\ldots\}$ ou $\mathcal{S} = \emptyset$ s'il n'y a pas de solution.

Cas particuliers

- Equation produit : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- Equation quotient : $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- Equation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. Le discriminant associé est $\Delta = b^2 - 4ac$.
  - Si $\Delta > 0$, deux racines distinctes : $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - Si $\Delta = 0$, une racine double : $r = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Si $\Delta < 0$, pas de racine.

Exemple de résolution d'équation

Résoudre $\dfrac{x^2 - x}{x} = 0$.

Le dénominateur s'annule en 0 donc l'équation est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Si $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned}\frac{x^2-x}{x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x} = 0\\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1\end{aligned}$$

Or 0 est une valeur interdite donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

Exercice 1 (correction)

Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$.
b) $6x^2 + 7x + 1 = 2x^2 + 6x$
c) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{7}{6} = 0$
d) $(2x+3)(x+1) = 6(x+1)$
e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
f) $x^3 = 4x$
g) $4x = \dfrac{4x-9}{x-2}$
h) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
i) $\dfrac{1-x}{x+2} = \dfrac{x+1}{3-x}$

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

Equations : cours + exos + exos-degré1
Equations produit : méthode-et-exos-interactifs + exo1 + exo2
Equations quotient méthode-et-exos-interactifs + exo1 + exo2
Equation du second degré : méthode-et-exos-interactifs + exo1 + exo2 + exos3

➢ Etude de signe

Rappel : signe de $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

- Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les deux racines de P, $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ et

x		$r1$		$r2$	
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

  On peut retenir que $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.
- Si $\Delta = 0$, en notant r la racine double de P, alors $P(x) = a(x - r)^2$ et $P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ ne se factorise pas et $P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Pour étudier le signe de $ax + b$ on peut résoudre $ax + b > 0$ au lieu de retenir une formule... Par exemple, $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

A retenir : pour étudier le signe d'une expression, il vaut mieux la mettre sous forme factorisée. Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on trace un tableau de signe.

Exemple d'étude de signe

Etudier le signe de $f(x) = \dfrac{6-2x}{x+5}$

f est définie ssi $x+5 \neq 0$ ssi $x \neq -5$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{6-2x}{x+5}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$6-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant 3$

$x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$

Exercice 2 Etudier le signe des expressions suivantes :

a) $-x^3-4x^2+5x$ b) $3x^2-4x+2$ c) $(1-x^2)(x-4)$ d) $\dfrac{x(x+1)}{2-3x}$ e) $5x(5x-6)+9$

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3+7x^2+11x-19$.

1. Justifier que 1 est solution de $x^3+7x^2+11x-19=0$.
2. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x-1)\left(x^2+8x+19\right)$.
3. Etudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

a) Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 5$ et $f(x) > -6$.

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

Signe d'une fonction affine : méthode-et-exos-interactifs + exo +

Signe d'un produit/quotient : cours + méthode-et-exos-interactifs + exo +

Signe d'un trinôme cours + méthode-et-exos-interactifs + exo

Etude de signe : exo1 + exo2 + exos3

➢ **Inéquation**

Méthode 2 - Résolution d'inéquation

1. On cherche les valeurs interdites.
2. Si c'est possible, on isole x.
   Sinon, on se ramène à une inéquation du type : $\dots < 0$ (ou $> 0, \leqslant 0, \geqslant 0$).et on fait un tableau de signe.
3. On donne l'ensemble des solutions avec des intervalles, en se demandant si les crochets doivent être ouverts ou fermés (valeurs interdites, inégalités strictes ou larges...)

Exercice 5 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2(x-3) \geqslant 8-3x$ b) $4(x-1) > x(5x-4)$ c) $(1-4x)(-2x^2+5x+3) > 0$

d) $\dfrac{-5}{x-2} \leqslant x+4$ e) $\dfrac{-x-3}{x^2+x+1} \leqslant 0$ f) $\dfrac{x}{x-1}+1 \leqslant \dfrac{2-x}{x+5}$

(Rappel : $\sqrt{2} \simeq 1,4$)

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

Inéquation du 1er degré : cours + méthode-et-exos-interactifs + exo1 + exo2 + exos3

Inéquation du 2nd degré : méthode-et-exos-interactifs + exos +

Inéquation via étude de signe : méthode-et-exos-interactifs + exo1 + exo2 + exos3

Remarque : On peut utiliser une étude de signe pour résoudre une inéquation mais on peut aussi résoudre une inéquation pour étudier le signe d'une expression

Exercice 6 Etudier le signe de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{4-2x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$

Correction

Exercice 1

a) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 9 - 8 = 1$.

$x_1 = \dfrac{3-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \dfrac{3+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\boxed{S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right\}.}$

b) $6x^2 + 7x + 1 = 2x^2 + 6x$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$6x^2 + 7x + 1 = 2x^2 + 6x \Leftrightarrow 4x^2 + x + 1 = 0$. $\Delta = -15$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

c) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{7}{6} = 0$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$\Delta = \frac{121}{9} - 4.\frac{1}{2}.\frac{7}{6} = \frac{121}{9} - \frac{7}{3} = \frac{100}{9}$ donc $\sqrt{\Delta} = \frac{10}{3}$.

$x_1 = \dfrac{\frac{11}{3} - \frac{10}{3}}{2.\frac{-1}{2}} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{\frac{11}{3} + \frac{10}{3}}{2.\frac{-1}{2}} = -7$

$\boxed{S = \left\{-7; -\dfrac{1}{3}\right\}}$

d) $(2x+3)(x+1) = 6(x+1)$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(2x+3)(x+1) = 6(x+1) &\Leftrightarrow (2x+3-6)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow (2x-3)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x-3 = 0 \quad \text{ou} \quad x+1 = 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = -1\end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1, \dfrac{3}{2}\right\}}$

e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$ avec $X = x^2$

$\Delta = 25$, $X = 1$ ou $X = -4$.

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \;$ ou $x^2 = -4 \Leftrightarrow x = 1 \;$ ou $\; x = -1$

$\boxed{\mathcal{S} = \{1, -1\}}$

f) $x^3 = 4x$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$x^3 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

$\boxed{\mathcal{S} = \{0, 2, -2\}}$

g) $4x = \dfrac{4x-9}{x-2}$: l'équation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\quad 4x = \dfrac{4x-9}{x-2} \quad \Leftrightarrow \dfrac{4x(x-2) - 4x + 9}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Delta = 144 - 144 = 0$, $x = \dfrac{12}{2.4} = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ (ou on observe que $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$)

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$

h) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{1}{2}$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Si $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{6x + 8 - x^2}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Delta = 68 = 4 \times 17$. $x_1 = \dfrac{-6 + 2\sqrt{17}}{-2} = 3 - \sqrt{17}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{17}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{3 - \sqrt{17}, 3 + \sqrt{17}\}}$

i) $\dfrac{1-x}{x+2} = \dfrac{x+1}{3-x}$ l'équation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

$$\begin{aligned}\text{Si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,3\},\quad \frac{1-x}{x+2} = \frac{x+1}{3-x} \quad &\Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} - \frac{x+1}{3-x} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(1-x)(3-x) - (x+1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = 0\\ &\Leftrightarrow 3 - x - 3x + x^2 - (x^2 + 2x + x + 2) = 0\\ &\Leftrightarrow 1 - x = 0\\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$

Exercice 2

a) $-x^3-4x^2+5x=x(-x^2-4x+5)$

$\Delta=36$, $x_1=\dfrac{4-6}{-2}=1$ et $x_2=\dfrac{4+6}{-2}=-5$

x	$-\infty$		-5		0		1		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$-x^2-4x+5$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$-x^3-4x^2+5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $3x^2-4x+2$: $\Delta=16-24=-8<0$ donc $3x^2-4x+2>0$ sur $\mathbb{R}$.

c) $(1-x^2)(x-4)$. On a $1-x^2=(1-x)(1+x)$ donc les racines de $1-x^2$ sont -1 et 1

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(1-x^2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $\dfrac{x(x+1)}{2-3x}$: l'expression est définie $\Leftrightarrow 2-3x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x(x+1)}{2-3x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

$2-3x>0\Leftrightarrow 2>3x\Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$

e) $5x(5x-6)+9=25x^2-30x+9=(5x-3)^2\geqslant 0$

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+7x^2+11x-19$.

1. $f(1)=1^3+7\times 1^2+11-19=1+7+11-19=0$
   Donc 1 est solution de $x^3+7x^2+11x-19=0$.
2. $f(x)=(x-1)\left(x^2+8x+19\right)=x^3+8x^2+19x-(x^2+8x+19)=x^3+7x^2+11x-19$
   Donc $f(x)=(x-1)\left(x^2+8x+19\right)$.
3. On étudie le signe de $x^2+8x+19$: $\Delta=64-4\times 19=64-76=-12<0$ donc $x^2+8x+19>0$

De plus, $x-1>0\Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^2+8x+19$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4 $f(x)=\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1}$

a) $\Delta=1-4\times 2=-7$ donc x^2+x+20 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

b) Pour montrer que $f(x)<5$, on étudie le signe de $f(x)-5$

$$\begin{aligned} f(x)-5 &= \frac{4x^2-5}{x^2+x+1}-5 \\ &= \frac{4x^2-5}{x^2+x+1}-\frac{5(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{4x^2-5-5x^2-5x-5}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-x^2-5x-10}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

D'après a), $x^2+x+2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Pour $-x^2-5x-10$, $\Delta=-15<0$ donc $-x^2-5x-10<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Ainsi, $\dfrac{-x^2-5x-10}{x^2+x+1}<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $\boxed{f(x)<5 \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.}$

Pour montrer que $f(x)>-6$, on étudie le signe de $f(x)+6$

$$\begin{aligned} f(x)+6 &= \frac{4x^2-5}{x^2+x+1}+6 \\ &= \frac{4x^2-5}{x^2+x+1}+\frac{6(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{4x^2-5+6x^2+6x+6}{x^2+x+1} \\ &= \frac{10x^2+6x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

$x^2+x+2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Pour $10x^2+6x+1$, $\Delta=-4<0$ donc $10x^2+6x+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Ainsi, $\dfrac{10x^2+6x+1}{x^2+x+1}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $\boxed{f(x)>-6 \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.}$

Exercice 5

a) $2(x-3) \geqslant 8-3x$: l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$2(x-3) \geqslant 8-3x \quad \Leftrightarrow 2x-6 \geqslant 8-3x \Leftrightarrow 5x \geqslant 14 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{14}{5}$

$\boxed{\mathcal{S} = [\frac{14}{5}, +\infty[.}$

b) $4(x-1) > x(5x-4)$: l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$4(x-1) > x(5x-4) \quad \Leftrightarrow 4x-4 > 5x^2-4x \Leftrightarrow -5x^2+8x-4 > 0$

$\Delta = 64-80 = -16$ donc $-5x^2+8x-4 < 0$ sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

c) $(1-4x)(-2x^2+5x+3) > 0$: l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$1-4x > 0 \Leftrightarrow 1 > 4x \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

Etudions le signe du trinôme $-2x^2+5x+3$: $\Delta = 49$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$-2x^2+5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$1-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(1-4x)(-2x^2+5x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathcal{S} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}[\cup]3, +\infty[.}$

d) $\dfrac{-5}{x-2} \leqslant x+4$: l'inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\quad \dfrac{-5}{x-2} \leqslant x+4 \quad \Leftrightarrow \dfrac{-5}{x-2} - x - 4 \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-5+(x-2)(-x-4)}{x-2} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-2x+3}{x-2} \leqslant 0$$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x^2-2x+3}{x-2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\Delta = 16$, $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$\boxed{\mathcal{S} = [-3, 1] \cup]2, +\infty[.}$

e) $\dfrac{-x-3}{x^2+x+1} \leqslant 0$

$\Delta = -3 < 0$ donc x^2+x+1 ne s'annule pas et $x^2+x+1 > 0$: l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$\dfrac{-x-3}{x^2+x+1}$		$+$	0	$-$	

$-x-3 > 0 \Leftrightarrow x < -3$

$\boxed{\mathcal{S} = [-3, +\infty[.}$

f) $\dfrac{x}{x-1} + 1 \leqslant \dfrac{2-x}{x+5}$: l'inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, -5\}$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -5\}$,

$$\frac{x}{x-1} + 1 \leqslant \frac{2-x}{x+5} \quad \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + 1 - \frac{2-x}{x+5} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+5)+(x-1)(x+5)-(2-x)(x-1)}{(x-1)(x+5)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+x^2+5x-x-5-(2x-2-x^2+x)}{(x-1)(x+5)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+6x-3}{(x-1)(x+5)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+5)} \leqslant 0$$

Trinôme x^2+2x-1 : $\Delta = 8$, $x_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		-5		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
x^2+2x-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+5)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = \left]-5\ ,\ -1-\sqrt{2}\right] \ \cup\ \left[-1+\sqrt{2}\ ,\ 1\right[.$

Exercice 6 Signe de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{4-2x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$

Soit $x \in]-1, 1[$.

$\sqrt{2x+4} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+4} > 2 \Leftrightarrow 2x+4 > 4 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$4-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x < -2$

x	-1		0		1
$\sqrt{2x+4}-2$		$+$	0	$-$	
$4-2x$		$-$		$-$	
$\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{4-2x}$		$-$	0	$+$	