

## INTERROGATION DE COURS N°11

### QUESTIONS DE COURS

**5 points**

1. Rappeler l'expression d'une densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$
2. Rappeler l'expression d'une densité de la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
3. Rappeler les principales propriétés de la fonction  $\Phi$ .

### EXERCICE

**15 points**

On considère  $\lambda \geq 0$  la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-2t^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.
  - a. Montrer que l'intégrale gaussienne  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .
  - b. Justifier que  $\int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt$ .
  - c. En déduire la valeur de  $\lambda$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .
  - a. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
  - b. Soit  $T$  une loi suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4})$ . Exprimer  $E(T^2)$  à l'aide d'une intégrale.
  - c. En déduire que  $X^2$  admet une espérance et montrer que  $E(X^2) = \frac{1}{4}$ .
  - d. En déduire que  $X$  admet une variance et que  $V(X) = \frac{\pi-2}{4\pi}$ .

# INTERROGATION DE COURS N°11 : CORRECTION

## QUESTIONS DE COURS COURS.

### EXERCICE

1. a. Montrons que l'intégrale gaussienne  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt$  converge :

On a :

$$e^{-2t^2} = e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ 2\sigma^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Donc la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-2t^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2t^2}$  est une densité de la loi  $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$ .

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2t^2} dt}_{\text{converge et vaut 1}}$$

Ccl:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt$  converge et vaut  $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

- b.  $f(-t) = \lambda e^{-2(-t)^2} = \lambda e^{-2t^2} = f(t)$  donc  $f$  est paire.

On a vu que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt$  converge donc  $\int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt$  converge et par parité  $\int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt$ .

- c.  $f$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0 et positive (car  $\lambda \geq 0$ ).

De plus par Chasles:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2t^2} dt$  puis par linéarité  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt$ .

Par conséquent  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et de plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \Leftrightarrow \lambda \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2} dt = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda \times \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = 1.$$

Ccl:  $f$  est une densité  $\Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

- a.  $X$  admet une espérance  $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  converge absolument.

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-2t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A 4te^{-2t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-2t^2} \right]_0^A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2A^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  (car  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-$ ), on en déduit que :

Ccl:  $X$  admet une espérance et  $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

- b. Soit  $T$  une loi suivant la loi normale  $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$ .

On a déjà vu que  $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2t^2}$  est une densité de la loi  $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$ .

$T^2$  admet donc une espérance et d'après le thm de transfert :  $E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2t^2} dt$ .

Ccl :  $E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-2t^2} dt$

- c.  $X^2$  admet une espérance  $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$  converge absolument. La fonction  $t^2 f(t)$  étant positive sur  $\mathbb{R}$  cela revient à montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$  converge.

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t^2} dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-2t^2} dt \quad \text{par parité de } t \mapsto t^2 e^{-2t^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-2t^2} dt \\ &= E(T^2) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= V(T) + (E(T))^2 \quad \text{d'après K.H} \\ &= \frac{1}{4} + 0^2 \quad \text{car } T \mapsto \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Ccl :  $X^2$  admet une espérance et  $E(X^2) = \frac{1}{4}$ .

- d. On en déduit que  $X$  admet une variance et que d'après la formule K.H :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{\pi - 2}{4\pi} \end{aligned}$$

Ccl :  $V(X) = \frac{\pi - 2}{4\pi}$ .