INTERROGATION DE COURS N°12

EXERCICE **20 points**

On considère le système différentiel $\begin{cases} x'(t) & = -x(t) - y(t) \\ y'(t) & = x(t) - 3y(t) \end{cases}$ de conditions initiales $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

1. **a.** Ecrire le système différentiel (S) sous forme matricielle $X'(t) = AX(t)$ avec $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice à déterminer.

b. Vérifier que (S) ne possède qu'un unique état d'équilibre.

2. **a.** Montrer que A ne possède qu'une seule valeur propre (à déterminer) puis en déduire que A n'est pas diagonalisable.

b. Déterminer une base (U) de l'unique sous espace propre de A, avec $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à déterminer.

c. Déterminer $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $AV = U - 2V$.

d. Montrer que (U, V) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis en déduire l'existence d'une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. On s'intéresse dans cette question au système différentiel (S') : $\begin{cases} u'(t) & = -2u(t) + v(t) \\ v'(t) & = -2v(t) \end{cases}$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'(t) = -2y(t)$.

b. Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E_c) : $y'(t) = ce^{-2t} - 2y(t)$ avec $c \in \mathbb{R}$.

i. Montrer que la fonction $y_p : t \mapsto cte^{-2t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_c).

ii. Résoudre l'équation différentielle (E_c).

c. Résoudre le système différentiel (S').

4. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ et $X(t) = PY(t)$.

Montrer que Y est solution de $(S') \Leftrightarrow X$ est solution de (S).

5. En déduire que les solutions du système différentiel (S) sont données par $\begin{cases} x(t) & = (\alpha - 2\beta + \beta t)e^{-2t} \\ y(t) & = (-\alpha + \beta - \beta t)e^{-2t} \end{cases}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

6. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy.

INTERROGATION DE COURS N°12 : CORRECTION

EXERCICE

On considère le système différentiel $\begin{cases} x'(t) &= -x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 3y(t) \end{cases}$ de conditions initiales $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

1. **a.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

b. Les états d'équilibre correspondent aux solutions constantes, donc au noyau de A.
Or A est clairement inversible donc $Ker(A) = \{0\}$.
Ccl : $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique état d'équilibre du système.

2. **a.** $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Ccl : $\boxed{Sp(A) = \{-2\}}$.

b. $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $E_{-2}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ccl : le vecteur $\boxed{U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ convient.

c. On cherche $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que $AV = U - 2V \Leftrightarrow (A + 2I_2)V = U \Leftrightarrow \{a - b = 1$.

Ccl : le vecteur $\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ convient.

d. (U, V) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puisque nous avons là deux vecteurs libres (non colinéaires) en dimension 2.
Notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la base (U, V).
Nous avons P inversible et d'après ce qui précède $AU = -2U$ et $AV = U - 2V$.
Ainsi d'après la formule du changement de base $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. On s'intéresse dans cette question au système différentiel $(S') : \begin{cases} u'(t) &= -2u(t) + v(t) \\ v'(t) &= -2v(t) \end{cases}$.

a. D'après le cours de 1ère année les solutions de (E_1) sont de la forme $\boxed{y : t \mapsto \beta e^{-2t}}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

b. On considère l'équation différentielle $(E_c) : y'(t) = ce^{-2t} - 2y(t)$ avec $c \in \mathbb{R}$.

i. Soit $y_p : t \mapsto cte^{-2t}$, une fonction évidemment dérivable par produit.
De plus :

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= ce^{-2t} - 2cte^{-2t} \\ &= ce^{-2t} - 2y_p(t) \end{aligned}$$

Ccl : y_p est bien solution de (E_c).

ii. Résolvons l'équation différentielle (E_c) :
• équation homogène : $y' = -2y$ dont les solutions sont de la forme $y : t \mapsto \alpha e^{-2t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
• solution particulière : $y_p : t \mapsto cte^{-2t}$
Ccl : les solutions de (E_c) sont de la forme $\boxed{y : t \mapsto \alpha e^{-2t} + cte^{-2t}}$.

c. Résolvons le système différentiel (S') :
Soit u, v les fonctions solutions de (S').
• v est solution de (E_1) donc $v(t) = \beta e^{-2t}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.
• u est solution de (E_c) avec $c = \beta$ donc $v(t) = \alpha e^{-2t} + \beta te^{-2t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ et $X(t) = PY(t)$.

a.

$$\begin{array}{rcl} Y \text{ est solution de } (S') & \Leftrightarrow & Y' = TY \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}X' = TP^{-1}X \qquad \text{car } X' = PY' \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}X' = Y' \\ & \Leftrightarrow & X' = PTP^{-1}X \\ & \Leftrightarrow & X' = AX \qquad \text{car } A = PTP^{-1} \\ & \Leftrightarrow & X \text{ est solution de } (S). \end{array}$$

5. D'après ce qui précède on a $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} \\ \beta e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} X(t) & = & PY(t) \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} \\ \beta e^{-2t} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} + \beta e^{-2t} \\ \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} \end{pmatrix} \end{array}$$

Puis on factorise par e^{-2t}.

<u>Ccl :</u> Les solutions du système différentiel (S) sont données par $\boxed{\begin{cases} x(t) & = (\alpha + \beta + \beta t)e^{-2t} \\ y(t) & = (\alpha + \beta t)e^{-2t} \end{cases}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : lorsque $t \to +\infty$ on constate que, par croissances comparées, les solutions tendent vers l'unique état d'équilibre du système.

6. Une solution $X : t \mapsto \begin{pmatrix} (\alpha - 2\beta + \beta t)e^{-2t} \\ (-\alpha + \beta - \beta t)e^{-2t} \end{pmatrix}$ est solution du problème de Cauchy avec conditions initiales $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si le couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha & = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

<u>Ccl :</u> L'unique solution du problème de Cauchy est donc : $\boxed{X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -te^{-2t} \\ (1-t)e^{-2t} \end{pmatrix}}$.