

INTERROGATION DE COURS N°13

QUESTIONS DE COURS

6 points

1. Séries géométriques : critère de convergence et formules
2. Intégrales de Riemann : critère de convergence et formules
3. DL d'ordre 2 en 0 de e^x , $\ln(1+x)$ et $(1+x)^\alpha$.

EXERCICE 1 : SÉRIES

7 points

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ converge et calculer sa somme.
2. Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{n! + 2^n}$.
3.
 - a. Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) < x$.
 - b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n+1) - 1}$.

EXERCICE 2 : INTÉGRALES

7 points

Les questions suivantes sont indépendantes (*bien préciser la ou les bornes impropres*) :

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+e^{-t}}} dt$ converge et calculer sa valeur.
2. Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.
3. Etudier la nature de la série $\int_0^1 \frac{1}{\ln(u)} du$.

INTERROGATION DE COURS N°13 : CORRECTION

QUESTIONS DE COURS

6 points

COURS.

EXERCICE 1 : SÉRIES

7 points

1. La série $\sum_{n \geq 2} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = -\frac{2}{3} \in]-1, 1[$.

Donc la série converge et de plus :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{15}.$$

2. Etude de la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{n! + 2^n}$:

- $\frac{3^n}{n! + 2^n} \geq 0$ (donc la série est une STP)
- $\frac{3^n}{n! + 2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3^n}{n!}$ car $2^n = o(n!)$ (par croissances comparées).
- $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle avec $x = 3$.

\Rightarrow d'après le critère d'équivalence des STP, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{n! + 2^n}$ converge.

3. a. Montrons que : $\forall x > 0, \ln(x) < x$.

On pose $g : x \mapsto \ln(x) - x$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* par théorèmes généraux.

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \text{ et donc } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

On en déduit que g est croissante sur $]0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

Ccl : la fonction g a pour maximum $g(1) = -1$ sur \mathbb{R}_+^* ce qui équivaut à : $\forall x > 0, \ln(x) - x < -1$ et donc $\forall x > 0, \ln(x) < x$.

- b. Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n+1) - 1}$:

- $\forall n \geq 2, \frac{1}{\ln(n+1) - 1} \geq 0$
- $\forall n \geq 2, \ln(n+1) < n+1$ donc $\ln(n+1) - 1 < n$ et $\frac{1}{\ln(n+1) - 1} > \frac{1}{n}$
- la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

\Rightarrow d'après le critère de comparaison des STP, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n+1) - 1}$ diverge.

EXERCICE 2 : INTÉGRALES

7 points

1. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+e^{-t}}} dt$ converge et calculons sa valeur :

- la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+e^{-t}}}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc l'intégrale est impropre uniquement en $+\infty$
- soit $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+e^{-t}}} dt = \left[-2\sqrt{1+e^{-t}} \right]_1^A = -2\left(\sqrt{1+e^{-A}} - \sqrt{1+e^{-1}}\right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -2\left(\sqrt{1} - \sqrt{1+e^{-1}}\right).$$

Ccl : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$ converge et vaut $2\left(\sqrt{1+e^{-1}} - 1\right)$.

Remarque : vu que $1 + e^{-1} > 1$ on a bien $2\left(\sqrt{1+e^{-1}} - 1\right) > 0$ ce qui est logique pour l'intégrale d'une fonction positive.

2. Etudions la nature de l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $] -1; 0[$ donc l'intégrale est impropre en -1 et en 0 .

De plus : $\forall x \in] -1; 0[$, $\frac{\ln(1+x)}{x} < 0$

Borne en 0^- :

- $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$
- $\int_{-\frac{1}{2}}^0 1 dx$ converge (intégrale classique)

\Rightarrow d'après le critère d'équivalence pour les intégrales de signe constant, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ converge.

Borne en -1^+ :

- $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{-1}{\sim} -\ln(1+x)$
-

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -\ln(1+x) dx &= -\int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \ln(1+x) dx \\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(y) dy \quad \text{par changement de variable affine } y = x + 1 \end{aligned}$$

Or l'intégrale (impropre en 0) $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(y) dy$ converge (intégrale usuelle) et donc $-\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(y) dy$ cv

\Rightarrow d'après le critère d'équivalence pour les intégrales de signe constant, l'intégrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ converge.

Ccl : Par Chasles $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

Donc l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ converge comme somme de deux intégrales convergentes.

3. Etudions la nature de la série $\int_0^1 \frac{1}{\ln(u)} du$:

• La fonction $u \mapsto \frac{1}{\ln(u)}$ est continue sur $]0; 1[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en 1 .

• $\forall u > 1$, $\frac{1}{\ln(u)} > 0$

Borne en 1 :

Par équivalent usuel $\ln(u) \underset{1}{\sim} u - 1$ donc $\frac{1}{\ln(u)} \underset{1}{\sim} \frac{1}{u-1}$.

De plus $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u-1} du = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{t} (-dt) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt$ est divergente par critère des intégrales de Riemann.

Ccl : l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\ln(u)} du$ diverge par critère d'équivalence.

Borne en 0 :

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(u)} = 0$ donc la fonction $u \mapsto \frac{1}{\ln(u)}$ se prolonge par continuité en 0 et donc l'intégrale

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(u)} du$ est faussement impropre en 0 , donc elle converge.

En particulier l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{\ln(u)} du$ converge.

Ccl : L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\ln(u)} du$ diverge comme somme d'une intégrale divergente et d'une intégrale convergente.