INTERROGATION DE COURS 14

Questions de cours — 5 points

1. Donner la dimension des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire de E dans F. Liens noyau/injectivité et image/rang.
3. Définition d'une matrice diagonalisable. Enoncer une condition suffisante de diagonalisation.

Exercice 1 : Equations différentielles — 5 points

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y'(0) = y(0) = 1 \end{cases}$.

On rappelle qu'une *trajectoire* associée à une solution y est un ensemble du type $\{(t, y(t)) \,|\, t \in I\}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Enfin on rappelle qu'une trajectoire est dite *trajectoire d'équilibre* si elle est associée à une solution constante.

1. Résoudre le problème de Cauchy.
2. Déterminer la ou les solutions d'équilibre.
3. Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy converge vers l'unique solution d'équilibre.

Exercice 2 : Théorie des graphes — 5 points

Soit G un graphe et A sa matrice d'adjacence.

1. Rappeler ce que représente le coefficient $(A^p)_{i,j}$ dans le langage des graphes.
2. Rappeler la définition d'un graphe connexe.
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle prenne en argument la matrice d'adjacence d'un graphe et renvoie 1 si le graphe est connexe et 0 sinon.
   On rappellera les commande suivantes :
   (a) *`np.linalg.matrix_power(M,i)` renvoie la matrice M^i.*
   (b) *`np.all(M)>0` renvoie le booléen `True` si tous les coefficients de la matrice M sont strictement positifs et `False` sinon.*

```python
def connexe(A) :
  n = ........
  M = np.eye(n) + A
  i = 0
  while not np.all(M)>0 :
    i = ............
    M = ...........
  if i = n:
    return ......
  else:
    return .........
```

Exercice 3 : Réduction des matrices — 5 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

INTERROGATION DE COURS 14 : CORRECTION

Questions de cours

COURS.

Exercice 1 : équations différentielles

1. L'équation caractéristique est $x^2+3x+2=0$ dont les solutions sont $x_1=-1$ et $x_2=-2$ (relation coefficients/racines par exemple). Les solutions de l'équation homogène $y''+3y'+2y=0$ sont donc de la forme $y=t\mapsto \alpha e^{-t}+\beta e^{-2t}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
   Déterminons les constantes $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ répondant aux conditions initiales $\begin{cases} y'(0)=1 \\ y(0)=1 \end{cases}$.
   On obtient le système : $\begin{cases} -\alpha-2\beta=1 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-2 \end{cases}$.
   <u>ccl :</u> L'unique solution du problème de Cauchy est donc $\boxed{y_0 : t\mapsto 3e^{-t}-2e^{-2t}}$.
2. Soit $y : t\mapsto c$ une solution constante ($c\in\mathbb{R}$).
   En remplaçant dans l'équation différentielle on obtient $y''+3y'+2y=0 \Leftrightarrow 2c=0 \Leftrightarrow c=0$.
   <u>ccl :</u> L'unique solution d'équilibre du système est la solution nulle $\boxed{y_* : t\mapsto 0}$.
3. Vu que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t}=0$, est évident que pour y_0 l'unique solution du problème de Cauchy, $\lim\limits_{t\to+\infty} y_0(t)=y_*(t)$.
   <u>ccl :</u> L'unique solution y_0 du problème de Cauchy converge vers l'unique solution d'équilibre y_* du système.

Exercice 2 : théorie des graphes

1. Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe G alors le coefficient $(A^p)_{i,j}$ d'indic e(i,j) de la matrice A^p représente le nombre de chemins (ou chaines) de longueur p dans le graphe G reliant le sommet i au sommet j.
2. Un graphe est connexe si toute paire de sommet du graphe peut être reliée par une chaîne dans le graphe. On rappelle qu'un graphe G de matrice d'adjacence A est connexe si et seulement si $I+A+A^2+...+A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs (n désignant le nombre de sommets du graphe).
3. La fonction teste si le graphe est connexe en calculant progressivement la matrice $I+A+A^2+...+A^i$ tant que celle-ci ne vérifie pas la condition de connexité.
   A la fin de la boucle `while` on teste selon la variable `i` :
   - si `i=n` cela signifie que $I+A+...+A^{n-1}$ n'a pas tous ses coefficients positifs et le graphe n'est pas connexe,
   - sinon on a `i<n` et donc la matrice $I+A+...+A^i$ a tous ses coefficients positifs ce qui implique a fortiori que la matrice $I+A+...+A^{n-1}$ a tous ses coefficients positifs et donc que le graphe est connexe.

```python
def connexe(A) :
    n = len(A)
    M = np.eye(n)
    i=0
    while not np.all(M)>0:
        i = i+1
        M =M + np.linalg.matrix_power(A,i)
    if i==n :
        return 0
    else:
        return 1
```

Exercice 3 : réduction des matrices

1. On trouve sans difficulté que $(A-I)^3=0_3$.
2. On a donc un polynôme annulateur de A le polynôme $p(x)=(x-1)^3$.
   Selon le cours, la seule valeur propre possible de A est $\lambda=1$.
   Par ailleurs la matrice $A-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est très clairement de rang $2 \Rightarrow 1$ est bien une valeur propre de A.
   <u>ccl :</u> $\boxed{Sp(A)=\{1\}}$.
3. <u>Inversibilité de A :</u> 0 n'est pas une valeur propre de A donc A est inversible.
   <u>Diagonalisabilité de A :</u> Supposons par l'absurde que A soit diagonalisable, c'est à dire semblable à une matrice diagonale.
   Il existerait alors une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.
   Or D étant semblable à A elle doit avoir les mêmes valeurs propre que A sur sa diagonale. C'est à dire $D=I$.
   Ainsi :
   $$A=PDP^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I.$$
   Ce qui est absurde !
   <u>ccl :</u> A n'est pas diagonalisable.