Soutien limite - niveau lycée

Exercice 1 Déterminer la limite des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$

$a_n = -n^2 - 5n + 3$ $\qquad b_n = (1-2n)(n^2-4)$ $\qquad c_n = e^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$d_n = \dfrac{2}{3\ln n + 4}$ $\qquad e_n = 3 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ $\qquad f_n = \dfrac{3}{2n^2 + n - 1}$

$g_n = (-3n^2 - 2n + 1)^3$ $\qquad h_n = 5 \times 10^{-n-1}$ $\qquad i_n = \dfrac{e^{2n} - e^n}{4^n}$

$j_n = \dfrac{-1}{(2n + n^3)^2}$ $\qquad k_n = \dfrac{2n^3 - n}{n}$ $\qquad l_n = \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 2\right)(n^2 + 4)$

$m_n = \dfrac{2^n}{\dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^2}}$ $\qquad o_n = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 - n}$ $\qquad p_n = \dfrac{e^{-n}}{n + \ln(n)}$

TD 6B : Limites de suites

Exercice 1 ◊ Sans forme indéterminée

$u_n = (n^2 + 3\ln n)(2 - e^n)$ $\qquad v_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^2}\right)$ $\qquad w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sqrt{3}^{\,n} - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 2 ♦ Composées $\quad a_n = \dfrac{1}{(1-\sqrt{n})^3}$ $\qquad b_n = \dfrac{e^{-2n+1}}{2^n + n^2}$ $\qquad d_n = \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right)$

Exercice 3 ♦♦ Croiss. Comp. $\quad u_n = \dfrac{n^3}{e^{n^2}}$ $\qquad v_n = \dfrac{\ln(n^2)}{\sqrt{n}}$ $\qquad w_n = \dfrac{n^4\, 5^n}{2^{3n+1}}$

Exercice 4 ♦ FI $\quad a_n = n^3 - 4n + 1$ $\qquad b_n = \dfrac{2n-1}{1+n^2}$ $\qquad c_n = \dfrac{2^n - n^2 + 1}{n^2 - n^3}$

$d_n = 2^n - e^n + \ln(n)$ $\qquad f_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+2}$

Exercice 5 ♦ Théorème des gendarmes ou théorème de comparaison

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 - 3n}$ $\qquad v_n = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n$ $\qquad w_n = \dfrac{\ln(e^n + 1)}{\sqrt{n}}$ **(Sur le site)**

Exercice 6 ♦♦ Pêle-mêle $\quad a_n = n^2 \ln n - n^3$ $\qquad b_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\qquad c_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$

$d_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$ $\qquad e_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{2^n}$ $\qquad f_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{n^2 - 2n + 2}$

(sur le site) $\quad h_n = (\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}$ $\qquad h_n = n^2 + (-1)^n\, n$ $\qquad i_n = \sqrt{n} - n^2$ $\qquad j_n = \dfrac{e^n}{n\ln(1 - \frac{1}{n})}$

$k_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\qquad l_n = \dfrac{3^n + 5^n}{4^n}$

Solutions

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 3$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} i_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} j_n = 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} l_n = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} o_n = 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$

Corrections

$g_n = (-3n^2 - 2n + 1)^3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 - 2n + 1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = -\infty$

$h_n = 5 \times 10^{-n-1} = 5 \times \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$

$i_n = \dfrac{e^{2n} - e^n}{4^n} = \dfrac{e^{2n}}{4^n} - \dfrac{e^n}{4^n} = \left(\dfrac{e^2}{4}\right)^n - \left(\dfrac{e}{4}\right)^n$

et $2 < e < 3$ donc $\dfrac{e^2}{4} > 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e^2}{4}\right)^n = +\infty$ et $0 < \dfrac{e}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e}{4}\right)^n = 0$

$j_n = \dfrac{-1}{(2n + n^3)^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n + 3n)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} j_n = 0$

$k_n = \dfrac{2n^3 - n}{n} = 2n^2 - 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$

$l_n = \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 2\right)(n^2 + 4)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}} - 2 = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 4 + \infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = -\infty$

$m_n = \dfrac{2^n}{\dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^2} = 0^+$ car $\dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^2} > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$

$o_n = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 - n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} o_n = 0$

$p_n = \dfrac{e^{-n}}{n + \ln(n)}$

Soutien limite - niveau ECG

Déterminer les limites des suites de terme général :

Exercice 1 Avec une composée :

$a_n = e^{\sqrt{n}+1}$ $\qquad b_n = \dfrac{e^{-n^2}}{n-1}$ $\qquad c_n = \sqrt{n^2+n}$

$d_n = \ln\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1+n^2}\right)$ $\qquad e_n = \dfrac{1+e^{\sqrt{n}}}{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 2 Avec une croissance comparée :

$a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ $\qquad b_n = \dfrac{n^2}{\ln(n^3)}$ $\qquad c_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\qquad d_n = \dfrac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$ $\qquad e_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}$

Exercice 3 Avec forme indéterminée :

$a_n = 3n^2 - 2n + 1$ $\qquad b_n = -n + \sqrt{n}$ $\qquad c_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{8n^3 - 4n - 1}$

$d_n = \sqrt{n^2 - n + 1}$ $\qquad e_n = e^n - 2n^2$ $\qquad f_n = 4^n - 2^n$

Exercice 4 via une inégalité ou un encadrement :

$u_n = \sqrt{n} + (-1)^n$ $\qquad v_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n}$

Exercice 5 Pèle mèle

$a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{2^{n+1}}$ $\qquad b_n = \dfrac{3^{-2n+1}}{\sqrt{n}}$ $\qquad c_n = n^3 + n(-1)^n$

$d_n = \sqrt{n}(n^2 - n)$ $\qquad e_n = \ln n - \sqrt{n}$ $\qquad f_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$g_n = \dfrac{-3n+4}{n^2-1}$ $\qquad h_n = \dfrac{n^2+2^n}{n^3-2n}$ $\qquad i_n = \dfrac{2^n - 5^n}{3^n + (-1)^n}$

$j_n = n^2\sqrt{1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$ $\qquad k_n = \dfrac{2n-1}{2n+1} \times \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ $\qquad l_n = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)}$

Soutien limite - niveau ECG - CORRECTION

Exercice 1 Avec une composée :

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}+1 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n^2}}{n-1} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1+n^2}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{-n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+e^{-n}}{1+n^2} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} \ln(X) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+e^{\sqrt{n}}}{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{\sqrt{n}} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = 0^-$ $\left(\text{car } 1-\frac{1}{n^2} < 1 \text{ donc } \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < 0\right)$

Exercice 2 Avec une croissance comparée :

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\ln(n^3)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3}\dfrac{n^2}{\ln(n)} = +\infty$ par croissances comparées

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^{1/2}} = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^4} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X^4} = +\infty$ par croissances comparées

Exercice 3 Avec forme indéterminée :

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 - 2n + 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n+\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{1}{\sqrt{n}} = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{8n^3-4n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{8n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-n+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^n - 2n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} e^n\left(1-2\times\dfrac{n^2}{e^n}\right) = +\infty$ car par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = +\infty$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$

Exercice 4 via une inégalité ou un encadrement :

On utilise $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ pour les deux suites :

$u_n = \sqrt{n} + (-1)^n \geqslant \sqrt{n} - 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 1 = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$v_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n}$. Comme $2 \leqslant 3+(-1)^n \leqslant 4$, on a $\dfrac{2}{n} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{4}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice 5 Pêle mêle

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n n^2 = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{-2n+1}}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\dfrac{(\frac{1}{9})^n}{\sqrt{n}} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{9}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + n(-1)^n$ car $n^3 - n \leqslant c_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(n^2-n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln n - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^{1/2}} = 0$ par croissances comparées

$f_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n)} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n+4}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n} = 0$

$h_n = \dfrac{n^2+2^n}{n^3-2n} = \dfrac{2^n\left(\dfrac{n^2}{2^n}+1\right)}{n^3\left(1-\dfrac{2n}{n^3}\right)} = \dfrac{2^n}{n^3}\times\dfrac{\dfrac{n^2}{2^n}+1}{1-\dfrac{2}{n^2}}$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}+1 = 1$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$

$i_n = \dfrac{2^n-5^n}{3^n+(-1)^n} = \dfrac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n-1\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)} = \left(\frac{5}{3}\right)^n\times\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{1+\left(\frac{-1}{3}\right)^n}$.

Or $\frac{5}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$,

$\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et $\left|\frac{-1}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} i_n = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} j_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{2n+1}\times\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right) = -\infty$