Soutien - Primitives - Intégrales - niveau Terminale

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

Cours primitives + Exos Primitives + Cours Intégrales + Exo Intégrales

I Primitives simples

Primitive

Soit I un intervalle. F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Fonction	Primitive	Intervalle de définition
a	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$
au'	au
$u' + v'$	$u + v$

Méthode 1

• Si $f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$ avec $p \neq 1$, alors une primitive est $F(x) = \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} = \dfrac{-1}{(p-1)x^{p-1}}$.

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes

a) $f(x) = \dfrac{12x^3 + 2x + 5}{2}$ b) $f(x) = \dfrac{5}{x}$ c) $f(t) = 5e^t - 4t + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{3}{x^3}$ e) $f(t) = 3(t + e^t)$ f) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$

II Primitives composées

Fonction	Primitive
$2u'u$	u^2
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'e^u$	e^u

Exemple

Déterminer une primitive de $f(x) = x\,e^{x^2+1}$

f est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$

$f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \times u'(x)e^{u(x)}$

Une primitive de $u'e^u$ est e^u donc une primitive de f est $F(x) = \dfrac{1}{2} \times e^{x^2+1}$

Exercice 2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{3}{2x+3}$ $f(x) = \dfrac{2x-7}{7}$

$f(x) = (x-1)\left(\dfrac{x^2}{2} - x + 3\right)$ $f(x) = e^{4x} + e^{2x}$ $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

$f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ $f(x) = xe^{x^2+1}$

$f(x) = e^{2x+1}$ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ $f(x) = 5e^{-x} + e^{x+1}$

Exercice 3 Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$f(x) = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$ $f(x) = \dfrac{-5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6}{x^3}$ $f(x) = \dfrac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

$f(x) = \dfrac{9}{3x+1}$ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^3 - 3x + 1}$

$f(x) = xe^{x^2}$ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{2}$

III Intégrales

Intégrale

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_1^4 3x^2 + 4x + 1\,dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{3t+1}\,dt$

- $$\begin{aligned}\int_1^4 3x^2 + 4x + 1\,dx &= \Big[x^3 + 2x^2 + x\Big]_1^4 \\ &= \left(4^3 + 2\times 4^2 + 4\right) - \left(1^3 + 2\times 1^2 + 1\right) \\ &= (4\times 16 + 2\times 16 + 4) - (1 + 2 + 1) \\ &= 64 + 32 + 4 - 4 = 96\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_{-1}^0 e^{3t+1}\,dt &= \int_{-1}^0 \frac{1}{3}\times 3\,e^{3t+1}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}\times e^{3t+1}\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{3}\times e^{3\times 0+1} - \frac{1}{3}\times e^{3\times(-1)+1} \\ &= \frac{1}{3}\times e^1 - \frac{1}{3}\times e^{-2} \\ &= \frac{e + e^{-2}}{3}\end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes

$\displaystyle\int_{-1}^1 t^4\,dt$ $\displaystyle\int_0^1 x^2 - x^3\,dx$ $\displaystyle\int_1^4 x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\,dx$ $\displaystyle\int_{-1}^1 (x-1)(x^2-2x+3)\,dx$ $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{t}{t^2+1}\,dt$

$\displaystyle\int_{-1}^1 xe^{x^2}\,dx$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $\displaystyle\int_{-2}^2 (t^2 - 4)\,dt$ $\displaystyle\int_0^1 e^{2x+1}\,dx$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$

Correction

Exercice 1

a) $f(x)=\dfrac{12x^3+2x+5}{2}$ donc $F(x)=\dfrac{3x^4+x^2+5x}{2}$

b) $f(x)=\dfrac{5}{x}$ donc $F(x)=5\ln|x|$

c) $f(t)=5e^t-4t+1$ donc $F(t)=5e^t-2t^2+t$

d) $f(x)=\dfrac{1}{3x}+\dfrac{5}{2x^2}-\dfrac{3}{x^3}$ donc $F(x)=\frac{1}{3}\ln|x|-\dfrac{5}{2x}+\dfrac{3}{2x^2}$

e) $f(t)=3(t+e^t)$ donc $F(t)=3\left(\dfrac{t^2}{2}+e^t\right)$

f) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}=x^{1/2}-\dfrac{1}{x}$ donc $F(x)=\dfrac{x^{3/2}}{3/2}-\ln|x|=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\ln|x|$

f) $f(x)=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x}$

Exercice 2

$f(x)=\dfrac{2}{2-x}$ donc $F(x)=-2\ln|2-x|$

$f(x)=3x+1+\dfrac{3}{2x+3}$ donc $F(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\ln|2x+3|$

$f(x)=\dfrac{2x-7}{7}$ donc $F(x)=\dfrac{x^2}{7}-x$

$f(x)=(x-1)\left(\dfrac{x^2}{2}-x+3\right)$ donc $F(x)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+3\right)^2$

$f(x)=e^{4x}+e^{2x}$ donc $F(x)=\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e^{2x}$

$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ donc $F(x)=2\ln|x^2+1|$

$f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ donc $F(x)=2e^{\sqrt{x}}$

$f(t)=\dfrac{\ln t}{t}=\dfrac{1}{t}\ln t$ donc $F(t)=(\ln t)^2$

$f(x)=xe^{x^2+1}$ donc $F(x)=\dfrac{1}{2}\times e^{x^2+1}$

$f(x)=e^{2x+1}$ donc $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ donc $F(x)=\ln|e^x+1|$

$f(x)=5e^{-x}+e^{x+1}$ donc $F(x)=-5e^{-x}+e^{x+1}$

Exercice 3

$f(x)=-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2x$ donc $F(x)=\dfrac{3}{x}-\sqrt{x}+x^2$

$f(x)=\dfrac{-5x^4+2x^3-3x^2+6}{x^3}=-5x+2-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^3}$ donnc $F(x)=-\frac{5}{2}x^2+2x-3\ln|x|-\frac{3}{x^2}$

$f(x)=\dfrac{4(x-1)^3-1}{(x-1)^2}=4(x-1)-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ donc $F(x)=2(x-1)^2+\dfrac{1}{x-1}$

$f(x)=\dfrac{9}{3x+1}=3\times\dfrac{3}{3x+1}$ donc $F(x)=3\,\ln|3x+1|$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}$ donc $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^3-3x+1}=\dfrac{-1}{3}\times\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$ donc $F(x)=\dfrac{-1}{3}\ln|x^3-3x+1|$

$f(x)=xe^{x^2}$ donc $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$

$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ donc $F(x)=\ln|e^x+e^{-x}|$

$f(x)=\dfrac{3x^2+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3x^2+1)$ donc $F(x)=\dfrac{1}{2}(x^3+x)$

Exercice 4

$\displaystyle\int_{-1}^{1}t^4\,dt=\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$

$\displaystyle\int_{0}^{1}x^2-x^3\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{12}$

$\displaystyle\int_{1}^{4}x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right]_{1}^{4}=\frac{133}{2}$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)(x^2-2x+3)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(2x-2)(x^2-2x+3)\,dx=\left[\frac{1}{4}(x^2-2x+3)^2\right]_{-1}^{1}=-8$

$\displaystyle\int_{-3}^{1}\frac{t}{t^2+1}\,dx=\int_{-3}^{1}\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{-3}^{1}=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 10)=-\frac{1}{2}\ln 5$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}xe^{x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-1}^{1}=0$

$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\Big[\ln(e^x+1)\Big]_{0}^{1}=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

$\displaystyle\int_{-2}^{2}(t^2-4)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-4t\right]_{-2}^{2}=\frac{-32}{3}$

$$\int_0^1 e^{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_0^1 = \frac{e^3-e}{2}$$

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx = \left[\ln(x^2+x-2)\right]_2^3 = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$