Variations

Complément de cours, méthodes et exercices sur sésamath

Rappels de seconde (tableau de variation, lectures graphiques) :
cours et méthodes + exos + corrections +

Rappels de première : variations et dérivées :
cours et méthodes + exos + Corrections

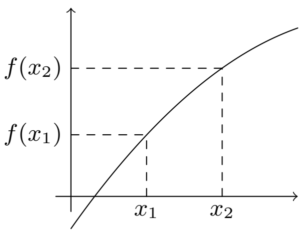
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

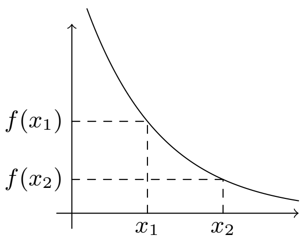
f est **croissante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

f est **décroissante** sur I si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

fonction croissante



fonction décroissante



Variations et dérivée

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$
- f est constante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$

Variations et extremums

Etudier les variations et déterminer les extremums de la fonction définie sur $[-2, 4]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$.

- Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

$\Delta = 9$ donc le trinôme a deux racines $\dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $\dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$.

x	-2		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	13	$\searrow$	-14	$\nearrow$	38

$f(-2) = 2$
$f(-1) = 13$
$f(2) = -14$
$f(4) = 38$

Le minimum de f sur $[-2, 4]$ est -14. Il est atteint en 2
(on peut aussi dire que f a un minimum en 2 qui vaut -14

Le maximum de f sur $[-2, 4]$ est 38. Il est atteint en 4.
(on peut aussi dire que f a un maximum en 4 qui vaut 38.

Attention à ne pas confondre la valeur du minimum (-14) et le point où il est atteint (2).

Exercice 1 Déterminer les variations des fonctions suivantes

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x(x - 12) + 1$ sur $I = [0, 10]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ sur $I =]-1, +\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 4}$ sur $I = [0, 2]$

e) $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x + 1}$ sur $I = [0, +\infty[$

f) $f(x) = e^{2x} - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

g) $f(t) = (t + 2)e^{-t/2}$ sur $I = \mathbb{R}$

h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $I =]0, +\infty[$

i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x + 3}{x - 2}\right)$ sur $I =]2, +\infty[$

Exercice 2 Tracer le tableau complet des variations (avec les limites)

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (-2x + 1)e^x$ sur $[0, +\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{x + 2}{e^x}$ sur $]-\infty, 0]$

d) $f(x) = (2 - \ln(x))\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$

Correction - Variations

Exercice 1

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ sur $I=\mathbb{R}$ donc $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

$(x+1)^2\geqslant 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2+2x-2

$\Delta=12$ donc $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$: deux racines $\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$ et $\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

b) $f(x)=x(x-12)+1=x^2-12x+1$ sur $I=[0,10]$ donc $f'(x)=2x-12$
$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow 2x-12\geqslant 0\Leftrightarrow 2x\geqslant 12\Leftrightarrow x\geqslant 6$

x	0		6		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

c) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ sur $I=]-1,+\infty[$ donc $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$(x+1)^2\geqslant 0$ et $x+2\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -2$ donc sur $]-1,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de x

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

d) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$ sur $I=[0,2]$ donc $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}>0$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

e) $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+1}$ sur $I=[0,+\infty[$ donc

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{x}}(x+1)-4\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\dfrac{2(x+1)-4x}{\sqrt{x}(x+1)^2}=\dfrac{-2x+2}{\sqrt{x}(x+1)^2}$
$\sqrt{x}(x+1)^2$ donc $f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow -2x+2\geqslant 0\Leftrightarrow -2x\geqslant -2\Leftrightarrow x\leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

f) $f(x)=e^{2x}-2x$ sur $I=\mathbb{R}$ donc $f'(x)=2e^{2x}-2=2\left(e^{2x}-1\right)$
$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow e^{2x}-1\geqslant 0\Leftrightarrow e^{2x}\geqslant 1\Leftrightarrow 2x\geqslant \ln(1)\Leftrightarrow x\geqslant 0$

x	$+\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

g) $f(t)=(t+2)e^{-t/2}$ sur $I=\mathbb{R}$ donc $f'(t)=-\frac{t}{2}e^{-t/2}$
$e^{-t/2}>0$ donc $f'(t)\geqslant 0\Leftrightarrow -\dfrac{t}{2}\geqslant 0\Leftrightarrow t\leqslant 0$

t	$+\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

h) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=]0,+\infty[$ de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec donc $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Sur $]0,+\infty$, $x^2>0$ donc $f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow 1-\ln x\geqslant 0\Leftrightarrow -\ln x\geqslant -1\Leftrightarrow \ln x\leqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

i) $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)$ sur $I=]2,+\infty[$ de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$ donc

$u'(x)=\dfrac{-7}{(x-2)^2}$

$(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$ donc $f'(x)=\dfrac{\dfrac{-7}{(x-2)^2}}{\dfrac{2x+3}{x-2}}=\dfrac{-7}{(x-2)^2}\times\dfrac{x-2}{2x+3}=\dfrac{-7}{(x-2)(2x+3)}$

Sur $]2,+\infty[$, $x-2>0$ et $2x+3>0$ donc $f'(x)<0$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

Exercice 2 Tracer le tableau complet des variations (avec les limites)

a) $f(x)=x^3-2x^2+2x+3$ sur $I=\mathbb{R}$ donc $f'(x)=3x^2-4x+2$
$\Delta=16-24=-8<0$ donc $f'(x)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-2x^2+2x+3=-\infty$

en $+\infty$ FI $\infty-\infty$: $f(x)=x^3\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $f(x)=(-2x+1)e^x$ sur $[0,+\infty[$ donc $f'(x)=(-2x-1)e^x$
$e^x\geqslant 0$ donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -2x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow -2x\geqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{-1}{2}$

x	0		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2e^{-1/2}$	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+1=-\infty$
$f(0)=1e^0=1$ $\qquad f(-\frac{1}{2})=(1+1)e^{-1/2}=2e^{-1/2}$

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$ sur $]-\infty,0]$ donc $f'(x)=\dfrac{(-x-1)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-x-1}{e^x}$
$e^x>0$ donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow -x\geqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant -1$

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2=-\infty$
$f(-1)=\dfrac{1}{e^{-1}}=e \qquad f(0)=\dfrac{2}{e^0}=2$

d) $f(x)=(2-\ln(x))\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ donc $f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$
Sur $]0,+\infty[$, $x>0$ donc $f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x\geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x\leqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0} \ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0} (2-\ln x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\ln(x)=-\infty$
et $f(e)=(2-\ln(e))\ln(e)=(2-1)\times 1=1$