

APPLICATIONS LINÉAIRES, ENDOMORPHISMES ET MATRICES

5.1 Généralités

DÉFINITION 5.1

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que f est une **application linéaire** ou *morphisme* de E dans F si

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

NOTATION : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$

Lorsque $F = E$ on dit que f est un **endomorphisme** de E .

NOTATION : L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

REMARQUE 5.1.

Pour une application linéaire f de E dans F , on dit que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs desquels on est parti.

En d'autres termes, on a

$$f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_p f(u_p) \quad \text{soit écrit autrement} \quad f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(u_i).$$

EXERCICE 5.1 (classique). Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y)$$

Montrer que f est une application linéaire.

EXERCICE 5.2 (classique). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = AM - MA.$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

PROPRIÉTÉ 5.2 (cas particuliers)

Soit f une application linéaire de E dans F . Alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
- $\forall u \in E : f(-u) = -f(u)$

EXERCICE 5.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u, v \in E$ tels que $f(u) = 2u + 3v$ et $f(v) = u - v$. Déterminer $f(u + v)$, $f(u - v)$ et $f(2u - 2v)$.

EXERCICE 5.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$. Montrer que $f(u - v) = 0$.

5.2 Noyau d'une application linéaire

DÉFINITION 5.3

Soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle **noyau** de f , noté $\text{Ker}(f)$, la partie de E , définie par :

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E / f(u) = \vec{0}_F\}$$

REMARQUE 5.2.

Le noyau d'une application linéaire est un objet central en algèbre linéaire. De nombreuses situations s'y rapportent comme par exemple l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

PROPRIÉTÉ 5.4

$\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

REMARQUE 5.3.

Ce théorème donne un nouveau moyen rapide pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

EXERCICE 5.5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x + y - z).$$

1. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.

EXERCICE 5.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le commutant de A est l'ensemble défini de la manière suivante :

$$\text{Com}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

On considère l'endomorphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM - MA$

1. En déduire que $\text{Com}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\text{Com}(A)$ puis en déduire sa dimension.

5.3 Image d'une application linéaire

DÉFINITION 5.5

Soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle **image** de f , noté $\text{Im}(f)$, la partie de F , définie par

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{u}) \text{ avec } \vec{u} \in E\}$$

PROPRIÉTÉ 5.6

$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

THÉORÈME 5.7 (Image d'une application à l'aide d'une base)

Soit f une application linéaire de E dans F et (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
Alors :

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

EXERCICE 5.7. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (y - z, -x + z, x - y)$. Déterminer une base de $Im(f)$ et sa dimension.

5.4 Injectif, surjectif, bijectif

Rappels : Injection, surjection, bijection

The diagrams show mappings between two sets, E and F, represented as ovals containing points. Arrows indicate the direction of the function f.

- f injective:** Each element in F has at most one arrow pointing to it from E. (Green circles)
- f non injective:** At least one element in F has two or more arrows pointing to it from E. (Red circles)
- f surjective:** Every element in F has at least one arrow pointing to it from E. (Green circles)
- f non surjective:** At least one element in F has no arrow pointing to it from E. (Red circles)
- f bijective:** Every element in F has exactly one arrow pointing to it from E. (Black circles)

• f est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent.
 • f est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.
 • f est **bijective** si, et seulement si, f est injective et surjective.

Applications linéaires injectives

THÉORÈME 5.8

Soit f une application linéaire de E dans F .

$$f \text{ est injective} \iff Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$$

EXERCICE 5.8. Etudier l'injectivité des applications linéaires suivantes :

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (2x - y, -4x + 2y)$

2. $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $p \mapsto (p(1), p-1)$

REMARQUE 5.4.

Que se passerait-il si dans l'application $M \mapsto AM$ on choisit pour A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$? Et plus généralement si A est une matrice inverse inversible ?

Applications linéaires surjectives

THÉORÈME 5.9

Soit f une application linéaire de E dans F .

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = F$$

EXERCICE 5.9. Etudier la surjectivité des applications linéaires suivantes :

$$1. f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, -4x + 2y) \end{array}$$

$$2. f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & (p(-1), p(0), p(1)) \end{array}$$

Applications linéaires bijectives

DÉFINITION 5.10 (isomorphismes, automorphismes)

- Une application linéaire bijective de E dans F est appelée **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijectif de E est appelé **automorphisme**.

NOTATION : L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

EXERCICE 5.10. Montrer que l'endomorphisme identité de E noté $id_E : E \longrightarrow E$ défini pour tout $u \in E$ par $id_E(u) = u$ est un automorphisme de E .

REMARQUE 5.5.

A priori pour montrer qu'une application est bijective, on doit montrer qu'elle est injective et surjective. Cependant nous allons voir par la suite un résultat très utile qui va nous permettre de simplifier cette étude. Regardons dans un premier temps pour un isomorphisme f de E dans F ce qu'il se passe au niveau de la dimension de l'espace de départ et d'arrivée :


PROPRIÉTÉ 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, \dots, e_n) une base de E .

Alors

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base de } F.$$

\rightsquigarrow En particulier si f est un isomorphisme de E dans F alors $\boxed{\dim(E) = \dim(F)}$.

 Ce résultat ne dit pas que si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f est un isomorphisme, mais qu'un isomorphisme ne peut exister qu'entre espaces vectoriels de même dimension.

EXERCICE 5.11. L'application linéaire $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - y + z)$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 est-elle bijective ?

EXERCICE 5.12. Montrer que l'application $f : p \mapsto (p(0), p(1), p(-1))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ sur \mathbb{R}^3 .

5.5 Rang d'une application linéaire en dimension finie

On rappelle que dans ce chapitre on suppose que tous les espaces vectoriels en jeu sont tous de dimensions finies.

DÉFINITION 5.12

Soit f une application linéaire de E dans F .

La dimension de $Im(f)$ est appelée **rang de f** et noté $rg(f)$. Ainsi :

$$rg(f) = \dim(Im(f))$$

REMARQUE 5.6.

- Vu que si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on a $Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$, la définition du rang de f coïncide avec la définition du rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. On peut donc redéployer les techniques de calculs du rang pour déterminer le rang de f .
- L'image de f étant un sous-espace vectoriel de F on en déduit qu'on a toujours $rg(f) \leq \dim(F)$, et de plus f est surjective si et seulement si $rg(f) = \dim(F)$.
- Par ailleurs on sait que $rg(f(e_1), \dots, f(e_n)) \leq n$ avec égalité si et seulement si la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

MORALITÉ : En mettant bout à bout les deux remarques précédentes on obtient :

$$rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F)).$$

EXERCICE 5.13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini pour tout $p \in \mathbb{R}_2[x]$ par $f(p) : x \mapsto xp'(x) - p(x)$. Déterminer le rang de f .

Le résultat suivant est fondamental : il relie les dimensions des deux sous-espaces vectoriels associés à une application linéaire, son image et son noyau. La connaissance de l'une des deux dimensions permettant ainsi de déduire l'autre.

THÉORÈME 5.13 (Théorème du rang)

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a la formule suivante :

$$\dim(E) = \dim(Ker f) + rg(f).$$

EXERCICE 5.14. On reprend l'exercice 13. Déduire $Ker(f)$ du calcul du rang de f .

EXERCICE 5.15 (d'après EDHEC 2010).

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbf{R}^3 et on considère l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

1. Déterminer une base de $Im(f)$ puis sa dimension.
2. Montrer que $e_2 - e_3 \in Ker(f)$ puis en déduire une base de $Ker(f)$.

Une conséquence extrêmement utile du théorème du rang concerne la caractérisation des isomorphismes et des automorphismes (endomorphismes bijectifs).

COROLLAIRE 5.14

Soit f une application linéaire de E dans F .

- Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f n'est pas surjective ;
- Si $\dim(F) < \dim(E)$, alors f n'est pas injective ;
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors on l'équivalence :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\} \iff \text{Im}(f) = F$$

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

EXERCICE 5.16.

Soit f l'application linéaire définie par $f: \begin{matrix} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & (p(1), p(0), p'(1)) \end{matrix}$

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$.
2. En déduire que f est un isomorphisme.

COROLLAIRE 5.15 (Caractérisation des automorphismes de E)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .

Alors :

$$f \text{ est un automorphisme de } E \iff f \text{ est injectif}$$

$$\iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$$

$$\iff \text{Im}(f) = E$$

$$\iff \text{rg}(f) = n$$

$$\iff f \text{ est surjectif.}$$

EXERCICE 5.17. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, 2x + y - 3z)$. Démontrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 par un calcul de rang matriciel.

5.6 Endomorphisme associé à une matrice

On s'intéresse dans cette section au cas (pas si) particulier d'une application linéaire définie à partir de la donnée d'une matrice.

DÉFINITION 5.16

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'application

$$f: \begin{matrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$$

est un endomorphisme, dit endomorphisme **canoniquement associé** à A .

DÉFINITION 5.17

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On appelle **noyau de A** , et on note $\text{Ker}(A)$, le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à A , c'est à dire le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

- On appelle **image de A** , et on note $\text{Im}(A)$, l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à A , c'est à dire le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \quad \text{où } (C_1, \dots, C_n) \text{ désigne les colonnes de } A.$$

- On appelle **rang de A** , le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à A et on a bien sûr :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n).$$

REMARQUE 5.7.

En observant que $Ae_i = C_i$ où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on constate que cette notion de rang matriciel coïncide bien sûr avec celle que nous avons vu plus tôt !

Python

La commande `matrix.rank()` de la librairie `numpy.linalg` renvoie le rang d'une matrice.

THÉORÈME 5.18

- **Théorème du rang pour les matrices :** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = n.$$

- **Caractérisation de l'inversibilité :**

$$A \text{ est inversible} \iff \text{Ker}(A) = \{0\} \iff \text{rg}(A) = n.$$

EXERCICE 5.18. Discuter sans calcul de l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 5.19. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A .
2. Calculer AU .
3. En déduire $\text{Ker}(A)$.
4. Déterminer $E_{-2}(A) = \text{Ker}(A + 2I_3)$.

5.7 Opérations sur les applications linéaires

PROPRIÉTÉ 5.19 (stabilité par combinaison linéaires)

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

En particulier $\mathcal{L}(E)$ est aussi un espace vectoriel.

PROPRIÉTÉ 5.20 (stabilité pour la composition)

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

PROPRIÉTÉ 5.21 (isomorphisme réciproque)

1. Si f est un isomorphisme de E dans F , alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E
2. Si f est un isomorphisme de E dans F et si g est un isomorphisme de F dans G alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G . De plus :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

DÉFINITION 5.22 (puissances d'endomorphismes et polynômes d'endomorphismes)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On définit les "puissances" de l'endomorphismes f par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n = \underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{n \text{-fois}} \quad \text{avec la convention } f^0 = id_E$$

où $id_E : E \rightarrow E$ est l'endomorphisme identité défini par $\forall u \in E, \quad id_E(u) = u$.

- Pour tout $p \in \mathbb{R}[x]$ de la forme $p : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ on définit le polynôme d'endomorphisme $p(f)$ par :

$$p(f) = a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 id_E.$$

REMARQUE 5.8.

D'après la propriété précédente, on remarque que f^n ou $p(f)$ sont encore des endomorphismes de E .

EXERCICE 5.20. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non identiquement nul tel que

$$f^2 = 0.$$

1. Montrer l'inclusion $Im(f) \subset Ker(f)$.
2. En déduire que $dim(Ker(f)) \geq 2$.
3. En déduire enfin que $rg(f) = 1$.

5.8 Matrice associée à une application linéaire

Dans tout ce qui précède, nous venons d'étudier des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie. De telles applications peuvent être très différentes et toucher des domaines des mathématiques et de l'informatique a priori très éloignés.

Pourtant, nous allons voir comment simplifier l'étude de ces applications en réduisant notre action à l'étude d'une matrice bien choisie.

DÉFINITION 5.23

Soient E et F deux e.v., $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F . On appelle alors **matrice de f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** , la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(\vec{e}_n) \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

où $f(e_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} f(e_2) \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} \dots f(\vec{e}_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées des $f(\vec{e}_i)$ dans la base \mathcal{B}_F

REMARQUE 5.9.

L'endomorphisme identité : $id_E : E \rightarrow E$ est l'endomorphisme de E défini pour tout $u \in E$ par $id(u) = u$.

PROPRIÉTÉ 5.24

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La matrice de f dans une base de E (au départ et à l'arrivée) est égale à la matrice identité
- La matrice de f dans n'importe quelle base de E (au départ et à l'arrivée) est la matrice identité
- f est l'endomorphisme identité de E .

REMARQUE 5.10.

Même conclusion pour la matrice nulle et l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)} : E \rightarrow E$ défini $u \mapsto 0_E$.

EXERCICE 5.21. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y - z, 2x + z)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

PROPRIÉTÉ 5.25 (calcul de l'image d'un vecteur par une application définie par sa matrice)

Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$ et $u \in E$ de vecteur coordonnées $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base \mathcal{B} .

Alors

$$f(u) \text{ a pour coordonnées } AU \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{dans la base } \mathcal{B}'.$$

EXERCICE 5.22. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. On pose $u = (1, 1, 1)$. Déterminer l'image de u par f .
2. Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ puis en déduire que $e_1 - e_2 - e_3 \in \text{Ker}(f)$.

REMARQUE 5.11.

On prendra garde au fait de ne pas confondre $f(u)$ qui est un vecteur appartenant à F avec AU qui appartient à l'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ces deux espaces étant complètement différents en général (bien que de même dimension).

PROPRIÉTÉ 5.26

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice A dans des bases de E et F . Alors :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A).$$

EXERCICE 5.23. On reprend l'exercice précédent.

1. Déterminer le rang de f .
2. En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
3. En déduire une base $\text{Ker}(f)$.

EXERCICE 5.24. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 4e_1 - 3e_2 + 5e_3$ $f(e_2) = 2e_1 + e_2$ $f(e_3) = -7e_3$
Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} , le rang de f puis en déduire que f est un automorphisme de E .

EXERCICE 5.25. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par $f(p) : x \mapsto (x-1)p'(x) + 3p(x)$.

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, le rang de f puis en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

EXERCICE 5.26. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = {}^t M - M$.

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, le rang de f puis la dimension du noyau.

THÉORÈME 5.27 (Dimension des espaces $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$)

Soient E et F deux e.v de bases respectives, \mathcal{B} et \mathcal{B}' et de dimensions respectives p et n .

Alors l'application $\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

En conséquence :

- $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = n \times p$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = p^2$
- La matrice de $\lambda f + \mu g$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est $\lambda A + \mu B$

EXERCICE 5.27. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et \mathcal{B} une base de E .

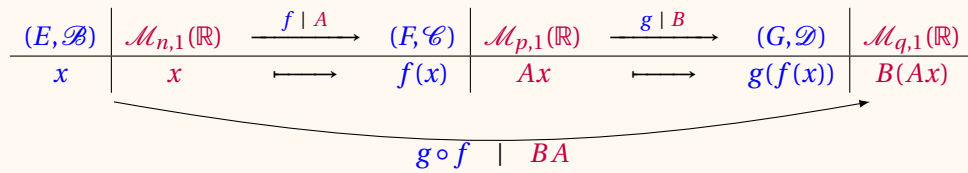
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f - 2id)$.

PROPRIÉTÉ 5.28 (Effet de la composition sur les matrices associées)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension fini, de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux morphismes. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$



En particulier pour un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base \mathcal{B} (au départ et à l'arrivée).

La matrice de $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ dans la base \mathcal{B} (au départ et à l'arrivée) est A^k

COROLLAIRE 5.29 (caractérisation des isomorphismes)

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension (finie), de bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Soit f une application linéaire de E dans F et A la matrice de f dans des bases de E et F . Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} &\iff A \text{ est inversible.} \\ &\text{et} \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) &= A^{-1} \end{aligned}$$

EXERCICE 5.28 (extrait Ecricome 2000). Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui à tout polynôme p de $\mathbb{R}_3[x]$ associe le polynôme $f(p) : x \mapsto p(x+1) + p(x)$.

1. Soit $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}
2. Montrer que f est bijective et préciser la matrice de f^{-1} dans la base \mathcal{B} .

5.9 Détermination de $Ker(f)$ et $Im(f)$ à l'aide de la matrice de f

THÉORÈME 5.30

Soient E et F deux e.v de bases respectives, \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$ la matrice de f , $u \in E$ de vecteur coordonnées U dans la base \mathcal{B} et $v \in F$ de vecteur coordonnées V dans la base \mathcal{B}' . Alors

$$f(u) = v \iff AU = V$$

REMARQUE 5.12.

Ce théorème montre le fort lien entre l'endomorphisme f de matrice A dans une base de E et l'endomorphisme $U \mapsto AU$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .

En particulier avec les notations du théorème on aura :

$$u \in Ker(f) \iff f(u) = 0_E \iff AU = 0 \iff U \in Ker(A).$$

Moralité

Pour déterminer $\text{Ker}(f)$ ou $\text{Im}(f)$ il peut être préférable de déterminer $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ puis de retranscrire le résultat.

EXERCICE 5.29. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.

EXERCICE 5.30. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = {}^t M - M$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.

EXERCICE 5.31. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f + id)$.

5.10 Changement de base

On remarquera que la matrice associée à une application linéaire donnée dépend de la base de E et de la base de F que l'on choisit et donc, il y a plusieurs matrices associées à une même application (sauf bien sûr pour les endomorphismes du type id_E avec $\lambda \in \mathbb{R}$ avec des bases identiques au départ et à l'arrivée).

Il est alors légitime de se poser la question de savoir quel est le lien entre ses différentes matrices et comment l'on passe de l'une à l'autre. C'est l'objet de l'étude qui suit.

DÉFINITION 5.31

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **matrice de passage** de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , la matrice

$$P = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

← Vecteurs de la nouvelle base
← Vecteurs de l'ancienne base

où $\vec{e}'_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ $\vec{e}'_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$... $\vec{e}'_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées des e'_i dans la base \mathcal{B}

REMARQUE 5.13.

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de l'écriture de la matrice de passage est que les **nouveaux** vecteurs se retrouve **en haut**.

PROPRIÉTÉ 5.32 (Caractérisation des bases)

Soit E un espace vectoriel \mathcal{B} une base de E . Alors :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \iff \text{ la matrice de passage } P \text{ est inversible}$$

EXERCICE 5.32. Dans \mathbb{R}^3 on considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique ainsi que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ définie par :

$$u_1 = e_1 + e_3$$

$$u_2 = 2e_1 + e_2 - e_3$$

$$u_3 = e_1 - e_2 + e_3$$

1. Quelle est la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Montrer que cette matrice est inversible. Que peut-on conclure sur la famille \mathcal{B}' ?
2. Déterminer la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} puis exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de u_1, u_2, u_3
3. Soit $u = (1, 2, 3)$. Déterminer les coordonnées de u dans la base \mathcal{B}' .

THÉORÈME 5.33 (formule de changement de coordonnées et formule de changement de base)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et P leur matrice de passage.

- Soit u un vecteur quelconque de E de vecteur colonne U dans la base \mathcal{B} et de vecteur colonne U' dans la base \mathcal{B}' . Alors on a la relation :

$$U = PU' \quad \text{et} \quad U' = P^{-1}U.$$

- Soit f un endomorphisme de E , A la matrice associée à f dans la base \mathcal{B} et B la matrice associée à f dans la base \mathcal{B}' . Alors on a la relation :

$$B = P^{-1}AP.$$

EXERCICE 5.33 (Changement de coordonnées). Dans $\mathbb{R}_2[x]$ on considère \mathcal{B} sa base canonique ainsi que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ la famille de polynômes définie par

$$q_0(x) = 1 \quad q_1(x) = x - 1 \quad q_2(x) = (x - 1)^2$$

1. Écrire la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Conclure que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Exprimer les coordonnées de P_0, P_1, P_2 en fonction de Q_0, Q_1, Q_2 .
3. Déterminer les coordonnées de $U(x) = 4x^2 - 3x + 7$ dans la base \mathcal{B}' .

EXERCICE 5.34 (Formule de changement de base). Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ la famille de vecteurs définie par $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (2, -1)$

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer P matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
3. En déduire A' matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

REMARQUE 5.14.

Une idée très féconde en algèbre linéaire est de rechercher parmi les matrices $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ d'un même endomorphisme f où \mathcal{B} parcourt l'ensemble des bases de E , celle qui a la forme la plus simple. Ce sera l'objet du prochain (et dernier !) chapitre d'algèbre linéaire.

DÉFINITION 5.34

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$B = P^{-1}AP.$$

REMARQUE 5.15.

Autrement dit A et B sont semblables si elles représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Application aux puissances de matrices

Si A et B sont semblables alors, de la relation $B = P^{-1}AP$ on déduit la relation $A = PBP^{-1}$ puis :

- (par récurrence immédiate à faire le jour J) $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1}$
- A est inversible $\iff B$ est inversible et de plus dans ce cas : $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$.

REMARQUE 5.16.

1. Lorsque B est diagonale et que P est connue il devient alors très facile de déterminer les puissances de A .
2. Lorsque A est inversible alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^{-n} = (A^{-1})^n$. La relation $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$ permet donc de calculer les puissances négatives de A puisqu'alors $A^{-n} = PB^{-n}P^{-1}$.

EXERCICE 5.35 (Extrait Ecricome 2023).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 représenté par la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1, 0), \quad u_4 = (1, 0, 0, 1).$$

On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
3. En déduire une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

On note $T = 2I_4 + N$.

1. Déterminer N puis N^2 . En déduire que : $\forall k \geq 2, N^k = 0_4$.
2. Déterminer T^n en fonction de I et de N puis en fonction de I et de T .
3. En déduire A^n en fonction de I et de A .