

ECG2 - 2024-2025

CONCOURS BLANC N°1

MATHÉMATIQUES

(4H)



La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- . les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),*
- . les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.*

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1 :

Dans tout l'exercice, on désigne par K la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et on introduit les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / MK = KM = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / {}^t M = M\}.$$

1. Calculer K^2 . En déduire, sans calcul supplémentaire, que K est inversible et déterminer K^{-1} .
2. (a) Montrer que \mathcal{E} et \mathcal{S} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par un argument de stabilité.
 (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de \mathcal{E} n'est inversible.
 (c) Soit $M \in \mathcal{E}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n \in \mathcal{E}$.
 (d) Soit $M \in \mathcal{S}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n \in \mathcal{S}$.

Indication : on rappelle la formule ${}^t(M \times N) = {}^t N \times {}^t M$

3. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que la famille (A, B, C, D) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Déterminer une famille génératrice de \mathcal{E} . Cette famille en forme-t-elle une base ? Quelle est la dimension de \mathcal{E} ?
4. Déterminer une base et la dimension de \mathcal{S} .
5. On considère l'ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$.
 (a) Montrer que \mathcal{K} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $(A, B + C, D)$ en forme une base.
 (b) Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{K}$, il existe trois suites $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}, (z_n)_{n \geq 1}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = x_n A + y_n (B + C) + z_n D.$$

6. On introduit alors la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que $T \in \mathcal{K}$ et donner ses coordonnées dans la base $(A, B + C, D)$.
- (b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n = x_n A + z_n D$$

où $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(z_n)_{n \geq 1}$ sont les suites données par $(x_1, z_1) = (3, 2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n \\ z_{n+1} = 2z_n \end{cases}$.

- (c) En déduire l'expression du terme général de $(x_n)_{n \geq 1}$ et de $(z_n)_{n \geq 1}$ puis l'expression de T^n .

7. On introduit les matrices colonnes

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on considère la suite de matrice colonnes $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence, pour $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = T U_n + V.$$

- (a) Montrer que $I_3 - T$ est inversible et calculer son inverse à l'aide de la méthode du pivot de Gauss-Jordan.
- (b) Déterminer une matrice colonne L telle que $L = T L + V$.
- (c) Vérifier que $U_{n+1} - L = T(U_n - L)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L).$$

- (d) En déduire l'expression de U_n en fonction de $n \geq 1$.

EXERCICE 2 :

Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction f (on dressera son tableau de variations, en justifiant les limites aux bornes).
- (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```

1 import ..... as .....
2
3 def fonc_1(a):
4     u=1
5     n=0
6     while ..... :
7         u=np.exp(-u)/u
8         n=.....
9     return n

```

- (b) On considère maintenant la fonction Python :

```

1 def fonc_2(a):
2     u=1
3     n=0
4     while u>a:
5         u=np.exp(-u)/u
6         n=n+1
7     return n

```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- (c) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n)` : qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .

3. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.

- (a) Démontrer que la fonction g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; 1]$.

(b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on notera α .

- (c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

(b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

(a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

(b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

(c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3.(b).

(d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

EXERCICE 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. Décrire soigneusement les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$ puis calculer leurs probabilités.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. Enfin on pose $V = X - U$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
 (b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}_{(X=n)}(U = k)$.
On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
 (c) En déduire que la loi de U est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- (d) Montrer que U admet une espérance et la calculer.
 (e) Montrer que U admet une variance et la calculer.
2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
 (b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant $(X = n)$.
 (c) En déduire la loi de V .
3. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
4. Que vaut $cov(U, V)$? En déduire $cov(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

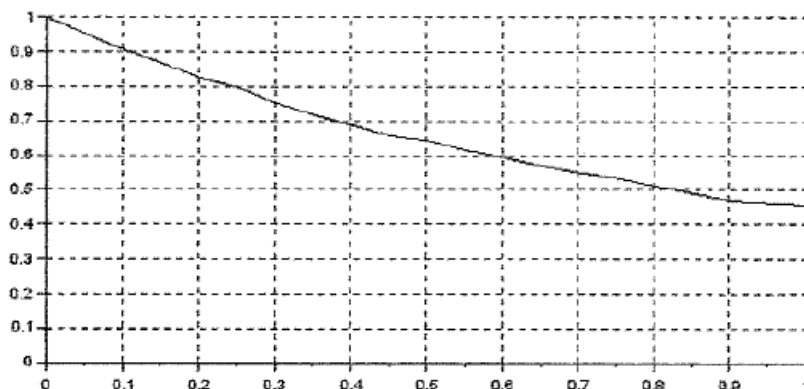
- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

On admettra par la suite que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Simulation informatique

On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

2. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
- Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y \geq n) = (1 - p)^n$.

3. (a) Montrer : $\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y \geq n)$.

(b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$.

- (c) Déterminer la valeur exacte de p pour laquelle le jeu est équilibré.

On donne $\sqrt{2} \approx 1,41$. Le résultat précédent est-il cohérent avec la valeur conjecturée à la question 1 de cette partie.