

# CONCOURS BLANC N°1

## MATHÉMATIQUES

### CORRECTION



#### EXERCICE 1 :

Dans tout l'exercice, on désigne par  $K$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et on introduit les deux sous-ensembles de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MK = KM = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\}.$$

1. On trouve par le calcul que  $K^2 = I_3$ . On a donc  $K \times K = I_3$ .

Ccl:  $K$  est inversible et  $K^{-1} = K$ .

2. (a) Montrons que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

- $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  par définition de  $\mathcal{E}$
- Il est clair que  $0_3 \in \mathcal{E}$ .
- Montrons que  $\mathcal{E}$  est stable par combinaisons linéaires :

Soient  $(M, N) \in \mathcal{E}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

D'une part,  $M$  et  $N$  commutent avec  $K$  donc :

$$\begin{aligned} (\lambda M + \mu N)K &= \lambda MK + \mu NK \\ &= \lambda M + \mu N \quad \text{car } M \text{ et } N \text{ sont dans } \mathcal{E} \\ &= \lambda KM + \mu KN \\ &= K(\lambda M + \mu N) \end{aligned}$$

Par conséquent  $\lambda M + \mu N \in \mathcal{E}$  et on a montré que  $\mathcal{E}$  est stable par combinaisons linéaires.

Ccl:  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Montrons que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  par définition de  $\mathcal{S}$
- Il est clair que  $0_3 \in \mathcal{S}$ .
- Montrons que  $\mathcal{S}$  est stable par combinaisons linéaires :

Soient  $(M, N) \in \mathcal{S}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda M + \mu N) &= \lambda {}^t M + \mu {}^t N \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda M + \mu N \quad \text{car } M \text{ et } N \text{ sont symétriques} \end{aligned}$$

Par conséquent  ${}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N$  et donc  $\lambda M + \mu N \in \mathcal{S}$ . On a donc montré que  $\mathcal{S}$  est stable par combinaisons linéaires.

Ccl:  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- (b) Supposons par l'absurde qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{E}$  inversible.

Par définition de  $\mathcal{E}$ , on a alors  $KM = M$ . Or  $M$  est inversible, donc en multipliant à droite par  $M^{-1}$  :

$$KM = M \Rightarrow KMM^{-1} = MM^{-1} \Rightarrow K = I_3.$$

Ce qui est absurde.

Ccl : Aucune matrice de  $\mathcal{E}$  n'est inversible.

(c) Soit  $M \in \mathcal{E}$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n \in \mathcal{E}$ .

- *Initialisation* :  $M^1 = M$  et  $M$  est supposée appartenir à  $\mathcal{E}$ . Donc la propriété est initialisée.
- *Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^n \in \mathcal{E}$ .

$$\begin{aligned} KM^{n+1} &= K \times M \times M^n \\ &= M \times M^n \quad \text{car } M \in \mathcal{E} \text{ et donc } M = KM \\ &= M^n \times M \\ &= M^n \times M \times K \quad \text{car } M \in \mathcal{E} \text{ et donc } M = MK \\ &= M^{n+1}K \end{aligned}$$

En cours de route on a montré que  $KM^{n+1} = M^{n+1}$ . Donc  $M^{n+1} \in \mathcal{E}$ , ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

- *Conclusion* : Par principe de récurrence, on a bien montré que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n \in \mathcal{E}$ .

(d) Soit  $M \in \mathcal{S}$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n \in \mathcal{S}$ .

- *Initialisation* :  $M^1 = M$  et  $M$  est supposée appartenir à  $\mathcal{S}$ . Donc la propriété est initialisée.
- *Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^n \in \mathcal{S}$ .

$$\begin{aligned} {}^t(M^{n+1}) &= {}^t(M^n \times M) \\ &= {}^tM \times {}^t(M^n) \quad \text{grâce à l'indication} \\ &= M \times M^n \quad \text{car } M, M^n \in \mathcal{S} \text{ et donc } {}^tM = M \text{ et } {}^t(M^n) = M^n \\ &= M^{n+1} \end{aligned}$$

Donc  $M^{n+1} \in \mathcal{S}$ , ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

- *Conclusion* : Par principe de récurrence, on a bien montré que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n \in \mathcal{S}$ .

3. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrons que la famille  $(A, B, C, D)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

Supposons que l'on ait une combinaison linéaire nulle de la forme  $aA + bB + cC + dD = 0_3$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Alors :

$$aA + bB + cC + dD = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ a & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}.$$

Ccl : La famille  $(A, B, C, D)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

(b) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Calculons les produits  $MK$  et  $KM$  :

$$MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{pmatrix} \quad KM = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff MK = KM = M \\ &\iff \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} c = g = a = i \\ b = h \\ f = d \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit de cette analyse que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & a \\ a & b & a \end{pmatrix} \mid (a, b, d, e) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, d, e) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&= \text{Vect}(A, B, C, D)
\end{aligned}$$

On a donc montré que la famille  $(A, B, C, D)$  est génératrice de  $\mathcal{E}$ .

Par ailleurs, on a démontré à la question précédente que cette famille était libre.

Ccl:  $(A, B, C, D)$  est une base  $\mathcal{E}$  et donc  $\dim(\mathcal{E}) = 4$ .

4. De la même manière. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{S} &\iff {}^t M = M \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} b = d \\ c = g \\ f = h \end{cases} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & b \\ c & f & i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où on déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & b \\ c & f & i \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}.
\end{aligned}$$

La famille formée des 6 matrices ci-dessus est donc génératrice de  $\mathcal{S}$ . On montre de même que c'est une famille libre (le système qui en découle est trivial) et ainsi la famille forme une base de  $\mathcal{S}$ .

Ccl:  $\dim(\mathcal{S}) = 6$ .

5. On considère l'ensemble  $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$ .

- (a) L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel. On en déduit que  $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Déterminons une famille génératrice de  $\mathcal{K}$  :

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Remarquons que, en reprenant les calculs de la question 3.b) :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{K} &\iff M \in \mathcal{E} \text{ et } M \in \mathcal{S} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \text{ et } {}^t M = M \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \text{ et } b = d \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & e & b \\ a & b & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & e & b \\ a & b & a \end{pmatrix} / (a, b, e) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} / (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / (a, b, e) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}(A, B + C, D) \end{aligned}$$

La famille  $(A, B + C, D)$  est donc génératrice de  $\mathcal{K}$  et on peut montrer là encore que c'est une famille libre (système linéaire trivial).

Ccl:  $(A, B + C, D)$  est une base de  $\mathcal{K}$  et  $\dim(\mathcal{K}) = 3$ .

(b) Soit  $M \in \mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- d'après la question 2.c)  $M \in \mathcal{E}$  donc  $M^n \in \mathcal{E}$  et
- d'après la question 2.d)  $M \in \mathcal{S}$  donc  $M^n \in \mathcal{S}$ .

On vient de montrer que  $M^n \in \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$  donc  $M^n \in \mathcal{K}$ .

Comme  $(A, B + C, D)$  est une base de  $\mathcal{K}$ , le vecteur des coordonnées de  $M^n$  dans cette base est de la forme  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$  avec  $x_n, y_n, z_n$  des réels.

Ccl: Il existe trois suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = x_n A + y_n (B + C) + z_n D$ .

6. On introduit alors la matrice  $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(a) On observe que  $T = 3A + 2D \in \mathcal{K}$  et donc que le vecteur colonne :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  représente le vecteur des coordonnées dans la base  $(A, B + C, D)$ .

(b) Montrons, par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T^n = x_n A + z_n D$  où  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifient  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} x_{n+1} = 6x_n \\ z_{n+1} = 2z_n \end{cases}$ .

• **Initialisation** :  $T^1 = T$  et la question précédente donne  $x_1 = 3$  et  $z_1 = 2$ . Donc la propriété est initialisée.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $T^n = x_n A + z_n D$ .

Alors :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= (3A + 2D)(x_n A + z_n D) \\ &= 3x_n A^2 + 3z_n AD + 2x_n DA + 2z_n D^2. \end{aligned}$$

Or  $A^2 = 2A, AD = DA = 0_3$  et  $D^2 = D$ .

On obtient alors :

$$T^{n+1} = 6x_n A + 2z_n D.$$

En posant  $x_{n+1} = 6x_n$  et  $z_{n+1} = 2z_n$ , on a bien la propriété au rang  $n + 1$ .

• **Conclusion** : Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(c) Les suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  et  $(z_n)_{n \geq 1}$  sont géométriques de raisons respectives 6 et 2 et de termes initiaux  $x_1 = 3$  et  $z_1 = 2$ . On en déduit :

$$x_n = 6^{n-1} x_1 = 3 \cdot 6^{n-1} \text{ et } z_n = 2^{n-1} z_1 = 2^n.$$

D'où on déduit l'expression de  $T^n$  :

$$T^n = 3 \times 6^{n-1} A + 2^n D \Rightarrow T^n = \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \end{pmatrix}.$$

7. On introduit les matrices colonnes

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on considère la suite de matrice colonnes  $(U_n)_{n \geq 1}$  définie par son premier terme  $U_1$  et la relation de récurrence, pour  $n \geq 1$ ,

$$U_{n+1} = TU_n + V.$$

(a) On commence par expliciter  $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  puis on entame un pivot de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

~ On trouve une matrice triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux non nuls donc  $I_3 - T$  est inversible.

Puis on poursuit le pivot pour déterminer  $(I_3 - T)^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 5L_1 + 3L_3 \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 5L_1 + 3L_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Ccl:  $I_3 - T$  est inversible et  $(I_3 - T)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(b) On résout :

$$\begin{aligned} L = TL + V &\iff L - TL = V \\ &\iff (I_3 - T)L = V \\ &\iff L = (I_3 - T)^{-1}V \quad \text{puisque } I_3 - T \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Donc

$$L = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(c) La vérification ne pose aucun problème (ceci nous rappelle fortement les suites arithmético-géométriques) :

$$U_{n+1} - L = TU_n + V - (TL + V) = T(U_n - L).$$

Puis par récurrence, montrons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L)$ .

• **Initialisation** :  $U_1 - L = T^0(U_1 - L)$  puisque  $T^0 = I_3$ .

• **Hérédité** : Supposons que  $U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L)$ .

Alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - L &= T(U_n - L) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= T \cdot T^{n-1}(U_1 - L) \quad \text{par H.R.} \\ &= T^{n+1}(U_1 - L). \end{aligned}$$

• **Conclusion** : Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(d) En combinant tout ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} U_n &= L + T^n(U_1 - L) \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 9 \times 6^n \\ 5 \\ -3 + 9 \times 6^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ccl:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 9 \times 6^n \\ 5 \\ -3 + 9 \times 6^n \end{pmatrix}$ .

## EXERCICE 2 :

1. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Or,  $x+1 > 0$  (car  $x > 0$ ),  $e^{-x} > 0$  et  $x^2 > 0$ , donc  $f'(x) < 0$ . Par conséquent,  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

Calculons ses limites. On a directement (pas de forme indéterminée) :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  ( $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  et  $x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$ ) et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  ( $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ). D'où le tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

- (b) On montre par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ ".

C'est évident pour  $n = 0$  (car  $u_0 = 1$  d'après l'énoncé).

Maintenant, soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque fixé. On suppose  $\mathcal{P}(n)$  et on montre  $\mathcal{P}(n+1)$  :

Par hypothèse de récurrence,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ . En particulier,  $u_n$  appartient à l'ensemble de définition de  $f$ , donc  $f(u_n)$  est bien défini, i.e  $u_{n+1}$  est bien défini.

De plus, d'après les variations de fonction  $f$  étudiées à la question précédente, on a  $f(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ . Donc en particulier  $f(u_n) > 0$ , i.e  $u_{n+1} > 0$ . D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Conclusion : par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ .

2. (a) On calcule les termes successifs de la suite jusqu'à avoir  $u_n > a$ , c'est-à-dire tant que  $u_n \leq a$ . D'où le programme :

```

1 import numpy as np
2
3 def fonc_1(a):
4     u=1
5     n=0
6     while u<=a:
7         u=np.exp(-u)/u
8         n=n+1
9     return n

```

- (b) La commande `fonc_2(a)` renvoie le plus petit  $n$  tel que  $u_n \leq a$ .

Par conséquent, les termes  $u_0, \dots, u_4$  sont tous compris dans l'intervalle  $]10^{-6}; 10^6]$ . Par contre,  $u_5 \leq 10^{-6}$  et  $u_6 > 10^6$ . Il semblerait que la suite  $(u_n)$  alterne des très grands termes avec des très petits termes.

- (c) Il suffit d'itérer  $n$  fois la fonction  $f$ , sur le modèle des fonctions `fonc_1` et `fonc_2`, mais avec une boucle `for` au lieu d'une boucle `while`. D'où le programme :

```

1 def suite_u(n):
2     u=1
3     for k in range(n):
4         u=np.exp(-u)/u
5     return u

```

3. (a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme différence de fonctions dérivables et pour tout  $x \geq 0$ , on a  $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$ . Or,  $e^{-x} > 0$  et  $2x \geq 0$ , donc  $g'(x) < 0$ . Par conséquent,  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ . De plus,  $g$  est continue sur cet intervalle (puisque'elle y est dérivable). Donc, par le théorème de la bijection,  $g$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $g([0; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0)]$ . Or, on a directement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $g(0) = 1$ .

Conclusion : la fonction  $g$  réalise une bijection (strictement décroissante) de  $[0; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1]$ .

(b) Pour tout  $x > 0$ , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff e^{-x} = x^2 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or,  $g$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1]$ , et 0 appartient à l'intervalle image  $]-\infty; 1]$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ . De plus,  $\alpha \neq 0$  car  $g(0) \neq 0$ .

Donc, d'après les équivalences ci-dessus, l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

(c) On a  $g(1) = e^{-1} - 1$ . Or,  $e > 2$ , donc  $e^{-1} < \frac{1}{2}$ , donc en particulier  $e^{-1} < 1$ . Par conséquent,  $g(1) < 0$ , c'est-à-dire  $g(1) < g(\alpha)$ . Par décroissance de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $\alpha < 1$ .

De même,  $g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{-1}{e}\right) - \exp(-2)$ . Or, comme vu ci-dessus,  $\frac{1}{e} < 1$ , et donc en particulier,  $\frac{1}{e} < 2$ . D'où  $\frac{-1}{e} > -2$ , et donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle) :  $\exp\left(\frac{-1}{e}\right) > \exp(-2)$ . On en déduit que  $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ , c'est-à-dire  $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha)$ . Et donc, par décroissance de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ , on a finalement  $\alpha > \frac{1}{e}$ .

Conclusion : on a  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .

4. (a) On a  $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$ . Comme  $e > 2$ , on en déduit que  $u_1 < \frac{1}{2}$ . Par conséquent, par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on a  $f(u_1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ , c'est-à-dire  $u_2 > 2e^{-1/2}$ .

Or,  $e < 4$ , donc  $e^{1/2} < 2$ , donc  $e^{-1/2} > \frac{1}{2}$  et donc  $2e^{-1/2} > 1$ .

Conclusion : on a  $u_2 > 1$ , c'est-à-dire  $u_2 > u_0$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $v_n = u_{2n}$ , et montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_{n+1} > v_n$ .

D'après la question précédente, on a  $u_2 > u_0$ , soit  $v_1 > v_0$ . Ainsi, la récurrence est initialisée.

Maintenant, soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque fixé. On suppose que  $v_{n+1} > v_n$  et on montre que  $v_{n+2} > v_{n+1}$  :

Par hypothèse de récurrence,  $v_{n+1} > v_n$ , soit  $u_{2n+2} > u_{2n}$ . Par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$ , soit  $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ . De même, par stricte décroissance de  $f$ , on en déduit alors que  $f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1})$ , soit  $u_{2n+4} < u_{2n+2}$ , ou encore :  $v_{n+2} > v_{n+1}$ , ce qui termine la récurrence.

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_{n+1} > v_n$ . Ainsi, la suite  $(v_n)$ , c'est-à-dire la suite  $(u_{2n})$ , est strictement croissante.

(c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $w_n = u_{2n+1}$ . D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{2n+2} > u_{2n}$ . Par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$ , soit  $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ , ou encore :  $w_{n+1} < w_n$ . Ainsi, la suite  $(w_n)$ , c'est-à-dire la suite  $(u_{2n+1})$ , est strictement décroissante.

Comme par ailleurs, elle est minorée par 0 ( $u_k > 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  d'après la question 1.(b)), on en déduit, par le théorème de la limite monotone que la suite  $(u_{2n+1})$  est convergente.

5. (a) Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ , donc la composée  $h(x) = f(f(x))$  a bien un sens. De plus,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(f(x)) \\ &= \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= \frac{x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}} \end{aligned}$$

Ce qui donne :  $h(x) = x e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)$ .

(b) D'après la question 1.(a), la fonction  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  à valeurs dans  $]0; +\infty[$ . Par conséquent,  $f \circ f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions continues. Autrement dit,  $h$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

Examinons maintenant la continuité de  $h$  (à droite) en 0. D'après la question précédente, on a, pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = x e^x \exp(-f(x))$ . Or,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ , donc  $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ , donc  $\exp(-f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . De plus,  $x e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ , donc  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Autrement dit,  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} h(0)$ , ce qui établit la continuité de  $h$  (à droite) en 0.

Conclusion : la fonction  $h$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

- (c) On sait déjà que 0 est solution de  $h(x) = x$  puisque  $h(0) = 0$  par définition de  $h(0)$ . Cherchons maintenant les solutions strictement positives. Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff xe^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = x \quad (\text{question 5.(a)}) \\ &\iff e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = e^{-x} \\ &\iff \frac{-e^{-x}}{x} = -x \quad \text{par injectivité de la fonction exp} \\ &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff f(x) = x \\ &\iff x = \alpha \quad (\text{question 3.(b)}) \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une unique solution strictement positive, qui est  $\alpha$ .

Conclusion : l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , admet exactement deux solutions sur  $[0; +\infty[$ , qui sont 0 et  $\alpha$ .

- (d) Reprenons les notations de la question 4.(c) : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = u_{2n+1}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(w_n)$ . Notons  $\ell$  la limite de  $(w_n)$  (qui existe d'après la question 4.(c)), et passons à la limite dans l'égalité  $w_{n+1} = h(w_n)$ . On obtient alors, par continuité de  $h$  sur  $[0; +\infty[$  (cf question 5.(b)) :  $\ell = h(\ell)$ . Par conséquent, d'après la question précédente,  $\ell = 0$  ou  $\ell = \alpha$ .

Montrons que  $\ell \neq \alpha$ . Le premier terme de la suite  $(w_n)$  est  $w_0 = u_1 = f(u_0) = f(1)$ . Or, comme  $\alpha < 1$  (cf question 3.(c)), on a, par stricte décroissance de  $f$  :  $f(\alpha) > f(1)$ , soit  $\alpha > w_0$ . Ainsi, la suite  $(w_n)$  est strictement décroissante (cf question 4.(c)), et de premier terme strictement inférieur à  $\alpha$ . Elle ne peut pas converger vers  $\alpha$ . Par conséquent,  $\ell$  est nécessairement égal à 0.

Conclusion : la suite  $(u_{2n+1})$  converge vers 0.

6. La suite  $(u_{2n})$  est croissante (cf question 4.(b)). Donc, par le théorème de la limite monotone : soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge, soit elle ne l'est pas, et dans ce cas diverge vers  $+\infty$ .

Par l'absurde, supposons qu'on soit dans le premier cas (suite majorée et convergente). Notons  $\ell'$  sa limite. De même qu'à la question précédente, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$ . D'où, en passant à la limite :  $\ell' = h(\ell')$ , et donc (cf question 5.(c))  $\ell' = 0$  ou  $\ell' = \alpha$ .

Or,  $(u_{2n})$  est croissante, de premier terme  $u_0$ , qui est strictement supérieur, à la fois à 0 et à  $\alpha$ . Elle ne peut donc pas converger, ni vers 0, ni vers  $\alpha$ , ce qui contredit ce qui précède. On n'est donc pas dans le cas où  $(u_{2n})$  est majorée et convergente.

Conclusion : la suite  $(u_{2n})$  n'est pas majorée, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$ .

Remarque : les résultats des 2 questions précédentes confirment le commentaire effectué à la question 2.(b).

## EXERCICE 3

### Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. Notons, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $P_i$  l'événement : "Obtenir pile au  $i$ -ème lancer" et  $F_i = \overline{P_i}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} (X = 0) &= P_1 \cap P_2 \\ (X = 1) &= (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ (X = 2) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4). \end{aligned}$$

D'où, par incompatibilité des événements et indépendance des lancers :

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(X = 1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(X = n)$  signifie que l'on a obtenu  $n$  Face et deux Pile, le second au  $(n+2)$ -ème lancer, le premier à l'un des  $(n+1)$  rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \bigcup_{i=1}^{n+1} (F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}).$$

Par incompatibilité des événements et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}.$

## Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

1. (a)  $U$  prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier  $n$ , il existe une suite de tirages amenant à  $n$  Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée  $n$ . Autrement dit,  $U(\Omega) = \mathbb{N}$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(X = n)$  est réalisé, l'urne est composée de  $(n+1)$  boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à  $n$  donc  $U_{(X=n)} \hookrightarrow \mathcal{U}(\{[0; n]\})$ .

Autrement dit, en tenant compte des incompatibilités :

$$P_{(X=n)}(U = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

- (c) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . D'après la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements  $((X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((U = k) \cap (X = n)) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} 0 \times P(X = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad (\text{d'après **Partie II, 2. (b)**}) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en **Partie I, 2. (b)**, il vient

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\ &= 4 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+k+2}} \quad \text{changement d'indice } i = n - k \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-1/3} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$

- (d)  $U$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$  converge absolument.

Les valeurs prises par  $U$  étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} kP(U = k) &= \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \sum_{k \geq 1} k \frac{2}{3^{k+1}} \quad \text{le premier terme étant nul} \\
&= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{3^{k-1}} \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente de raison  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ .  
 $U$  admet donc une espérance et de plus :

$$\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) \\
&= \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1 - 1/3)^2} \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion :  $U$  admet une espérance et de plus  $E(U) = \frac{1}{2}$ .

- (e)  $U$  admet une variance si et seulement si  $U^2$  admet une espérance, ce qui, d'après le théorème de transfert est équivalent à la convergence absolue de la série  $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$ .

Toutes les valeurs étant positives, il suffit de montrer la convergence de cette série.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k) &= \sum_{k \geq 1} k^2 P(U = k) \quad \text{le premier terme étant nul} \\
&= \sum_{k \geq 0} k^2 \frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \sum_{k \geq 1} [k(k-1) + k] \frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \frac{2}{3^3} \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée et dérivée seconde convergentes car toutes deux de raison  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ .  
 $U^2$  admet donc une espérance et de plus :

$$\begin{aligned}
E(U^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) \\
&= \frac{2}{3^3} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{(1 - 1/3)^3} + E(U) \quad \text{on reconnaît la somme définissant } E(U) \\
&= \frac{2}{3^3} \times \frac{2 \times 3^3}{2^3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par conséquent  $U$  admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(U) &= E(U^2) - (E(U))^2 \\
&= 1 - \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Ccl :  $U$  admet une variance et  $V(U) = \frac{3}{4}$ .

2. (a)  $V$  prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un tirage amenant à  $n$  Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas  $(V = n)$  est réalisé. Ainsi,  $V(\Omega) = \mathbb{N}$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $V_{|X=n}$  prend ses valeurs entre 0 et  $n$  et, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on a :

$$\begin{aligned} P_{(X=n)}(V = k) &= P_{(X=n)}(X - U = k) \\ &= P_{(X=n)}(U = n - k) \end{aligned}$$

Par ailleurs si  $k > n$  alors on a clairement  $P_{(X=n)}(V = k) = 0$ .

Conclusion :  $V_{|X=n} \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, \dots, n\})$  autrement dit  $P_{|X=n}(U = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \geq k \end{cases}$ .

- (c) En reprenant les calculs effectués à la question 2.c de cette partie, on observe que  $U$  et  $V$  ont même loi.

Conclusion :  $\forall k \in \mathbb{N}, P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$ .

3. Soient  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ . On a

$$(U = k) \cap (V = l) = (U = k) \cap (X - U = l) = (U = k) \cap (X = k + l).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P((U = k) \cap (V = l)) &= P((U = k) \cap (X = k + l)) \\ &= P_{(X=k+l)}(U = k) \times P(X = k + l) \\ &= \frac{1}{k+l+1} \times (k+l+1) \frac{4}{3^{k+l+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+l+2}} \\ &= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{l+1}} \\ &= P(U = k)P(V = l). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ .

Conclusion :  $U$  et  $V$  sont indépendantes.

4.  $U$  et  $V$  étant indépendantes, on a d'une part  $cov(U, V) = 0$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} cov(X, U) &= cov(V + U, U) \\ &= cov(V, U) + cov(U, U) \\ &= cov(U, V) + V(U) \quad \text{par propriétés de la covariance} \\ &= V(U) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ccl :  $cov(X, U) = \frac{3}{4}$ .

### Partie III : Étude d'un jeu

#### 1. Simulation informatique

On observe que pour  $p \approx 0,8$ , on obtient une fréquence de victoires de  $A$  approximativement égale à 50%.

Conclusion : Le jeu est équilibré pour  $p \approx 0,8$ .

#### 2. Étude de la variable aléatoire $Y$

- (a)  $Z$  représente le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre ( $p$ , la probabilité de faire Pile).

Conclusion :  $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

- (b)  $Y$  étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation  $Y = Z - 1$ .

Il s'ensuit que  $Y$  admet une espérance et une variance puisque  $Z$  en admet et de plus :

$$E(Y) = E(Z) - 1 \quad \text{par linéarité de l'espérance} \quad \text{et} \quad V(Y) = V(Z) \quad \text{par propriété de la variance}$$

Conclusion : En utilisant nos connaissances sur la loi  $\mathcal{G}(p)$  il vient  $E(Y) = \frac{1-p}{p} - 1$  et  $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$ .

(c) Posons  $q = 1 - p$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) \\ &= P(Z \geq n + 1) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k \\ &= \frac{p}{q} \times \frac{q^{n+1}}{1 - q} \\ &= q^n. \end{aligned}$$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y \geq n) = q^n$  avec  $q = 1 - p$ .

3. (a) En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements  $((X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (X \leq Y)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (n \leq Y)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}). \end{aligned}$$

Conclusion:  $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n)$ .

(b) En injectant les résultats établis aux parties précédentes, on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} q^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \quad \text{on reconnaît une série géom dérivée de raison } -1 < \frac{q}{3} < 1. \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1 - q/3)^2} \\ &= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\ &= \frac{4}{(3-q)^2} \\ &= \frac{4}{(2+p)^2} \quad \text{avec } q = 1 - p. \end{aligned}$$

Conclusion:  $P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$ .

(c) Le jeu est équilibré quand  $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire quand  $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$ .

Or

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2+p)^2} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{8} = p+2 \quad \text{car tout est positif} \\ &\Leftrightarrow p = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Conclusion: Le jeu est équitable pour  $p = 2(\sqrt{2} - 1)$ .

Avec  $\sqrt{2} \approx 1,41$  on a  $2(\sqrt{2} - 1) \approx 2 \times (0,41 - 1) = 0,82$ , donc on retrouve la valeur  $p \approx 0,82$  cohérente avec la réponse déterminée graphiquement à la question 1 de cette partie.