Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a \, \dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, b[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]b, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto x^{a+1}$ qui :
    - est continue sur $]b, +\infty[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]b, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } b.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, b[$, alors : $f(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \in [b, +\infty[$, alors, comme $a > 0$ et $b > 0$: $f(x) = a \, \dfrac{b^a}{x^{a+1}} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{b}^{+\infty} f(x) \, dx$$

  - × La fonction f est continue par morceaux sur $[b, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} f(x) \, dx$ est donc seulement impropre en $+\infty$.
  - × Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_b^B f(x) \, dx &= \int_b^B a \, \frac{b^a}{x^{a+1}} \, dx = a \, b^a \int_b^B x^{-a-1} \, dx \\ &= a \, b^a \left[\frac{x^{-a}}{-a} \right]_b^B = -b^a \left[\frac{1}{x^a} \right]_b^B \qquad \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ &= -b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a} \right) \end{aligned}$$

× Or, comme $a > 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} \dfrac{1}{B^a} = 0$. D'où :

$$\lim_{B \to +\infty} - b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a} \right) \; = \; -b^a \left(0 - \frac{1}{b^a} \right) \; = \; 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ est convergente et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

Démonstration.

- Dans la suite, on considère : $X(\Omega) = [b, +\infty[$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x \in \,]-\infty, b[$, alors : $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [b, +\infty[$). D'où :

$$F_X(x) \; = \; \mathbb{P}(\,[X \leqslant x]\,) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$

  × si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(\,[X \leqslant x]\,) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\
&= \int_{b}^{x} f(t)\, dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [b, +\infty[\textit{)} \\
&= \int_{b}^{x} a\, \frac{b^a}{t^{a+1}}\, dt \\
&= a\, b^a \int_{b}^{x} t^{-a-1}\, dt \\
&= \cancel{a}\, b^a \left[\frac{t^{-a}}{-\cancel{a}} \right]_b^x && \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\
&= -b^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{b^a} \right) \; = \; 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x} \right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}}$$

Commentaire

Profitons de cette question pour faire une remarque sur la notation $X(\Omega)$.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \ \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.

- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.

- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

  « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »

  × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
  On se permet alors d'écrire :

  « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient à l'aide d'une dsijonction de cas). □

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $b\,U^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto b\,x^{-\frac{1}{a}}$, de sorte que $Y = b\,U^{-\frac{1}{a}} = h(U)$.

  On **considère** : $U(\Omega) =]0, 1]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & = & \big(h(U)\big)(\Omega) \ = \ h\big(U(\Omega)\big) \\ & = & h(]0, 1]) \\ & = & [h(1), \displaystyle\lim_{x \to 0} h(x)[\\ & = & [b, +\infty[\end{array}$$

  (car, comme $a > 0$ et $b > 0$, la fonction h est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$*)*

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) = [b, +\infty[.}$$

Commentaire

Rappelons que la v.a.r. $Y = h(U)$ est par définition l'application :

$$Y = h(U) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & h\big(U(\omega)\big) \end{array}$$

Comme la fonction h est définie uniquement sur $]0, +\infty[$, la v.a.r. $Y = h(U)$ est bien définie seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega, \ U(\omega) \subset \,]0, +\infty[$$

Autrement dit, il est primordial, pour la bonne définition de l'objet $Y = h(U)$, de considérer que U est à valeurs dans $]0, 1] \subset \,]0, +\infty[$ (et non $[0, 1[\not\subset \,]0, +\infty[$ comme pouvait le suggérer l'énoncé).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in \,]-\infty, b[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) = [b, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}(\, [Y \leqslant x] \,) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - $\times$ si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}(\, [Y \leqslant x] \,) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[b \, U^{-\frac{1}{a}} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U^{-\frac{1}{a}} \leqslant \dfrac{x}{b}\right]\right) & \textit{(car } b > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \left(\dfrac{x}{b}\right)^{-a}\right]\right) & \textit{(par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto x^{-a} \textit{ sur }]0, +\infty[, \textit{ car } a > 0\textit{)} \\ & = & 1 - F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a}\right) & \textit{(car } U \textit{ est une v.a.r. à densité)} \end{array}$$

  - $\times$ Or :

$$\begin{array}{lcl} & x \geqslant b & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{b} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[, \textit{ car } b > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{b}{x} \leqslant 1 & \textit{(car } b > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \left(\dfrac{b}{x}\right)^{a} \leqslant 1 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^{a} \textit{ sur } [0, +\infty[, \textit{ car } a > 0\textit{)} \end{array}$$

Comme $a > 0$, $b < 0$ et $x > 0$, on en déduit : $0 < \left(\dfrac{b}{x}\right)^{a} \leqslant 1$.

× De plus, comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\,]0,1]\,)$: $F_U : u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant 0 \\ u & \text{si } 0 < u \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$.

Ainsi : $F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right) = \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}.}$$

× D'après la question *2.*, on reconnaît la fonction de répartition F_X de X qui suit la loi de Pareto de paramètres a et b.
Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ suit la loi de Pareto de paramètres } a \text{ et } b.}$$

Commentaire

- On a démontré, lors de l'étude de $Y(\Omega)$, que h réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[b,+\infty[$. Il est possible de déterminer l'expression de $h^{-1} : [b,+\infty[\; \to \;]0,1]$.
Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in \;]0,1]$ et $y \in [b,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} y = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = b\,x^{-\frac{1}{a}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{b}{y}\right)^a \\ &\Leftrightarrow \quad x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$

On démontre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$.

- On retrouve ici l'expression de la quantité $\left(\dfrac{b}{x}\right)^a$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $h^{-1}(x)$. Plus précisément, on a :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant x]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\,[h(U) \leqslant x]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\,\big[U \leqslant h^{-1}(x)\big]\,\big) \;=\; F_U\big(h^{-1}(x)\big)$$

On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**. $\square$

b) En déduire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
function X = pareto(a, b)
    U = rand()
    X = b ⋆ (U. ^ (-1/a))
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `pareto`,
  - × elle prend en entrée 2 paramètres `a` et `b`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `X`.

```
1  function X = pareto(a, b)
```

- **Contenu de la fonction**
  En ligne 2, on stocke dans la variable `U` une simulation de la v.a.r. U de loi $\mathcal{U}(]0,1])$.

```
2      U = rand()
```

D'après la question précédente, la v.a.r. $Y = b\,U^{-\frac{1}{a}}$ suit la même loi que la v.a.r. X, dès lors que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$.
Ainsi, en ligne 3, on stocke dans la variable `Y` une simulation de la v.a.r. X.

```
3      X = b ⋆ (U.^(-1/a))
```

Commentaire

On rappelle que l'opérateur `.^` est l'opérateur de puissance terme à terme, contrairement à l'opérateur `^` qui est l'opérateur de puissance mathématique classique. Par exemple, en notant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on obtient :

```
--> A = [1, 2 ; 3, 4]
--> A.^2
   ans =
       1.   4.
       9.   16.
--> A^2
   ans =
       7.   10.
       15.   22.
```

☐

c) On considère la fonction **Scilab** ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
function L = mystere(a, b)
    L = []
    for p = 2 : 6
        S = 0
        for k = 1 : 10^p
            S = S + pareto(a,b)
        end
        L = [L, S / 10^p]
    end
endfunction
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `mystere`,
  × elle prend en entrée 2 paramètres `a` et `b`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `L`.

```
1 function L = mystere(a, b)
```

La variable de sortie `L` est ensuite initialisée à la matrice vide.

```
2       L = []
```

- **Structure itérative**
  Commençons par décrire ce qu'il se passe à l'intérieur de cette première structure itérative (`for p = 2 : 6`) avant de s'intéresser à l'utilité de la variable `p`.
  × On commence par initialiser une variable `S` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).
  × Les lignes 5 à 7 permettent de mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne la somme de 10^p simulations de la v.a.r. X suivant la loi de Pareto de paramètres `a` et `b`. Pour cela, on met de nouveau en place une structure conditionnelle (boucle for) et on utilise la fonction `pareto` définie en question précédente pour obtenir les simulations de la v.a.r. X.

```
5           for k = 1 : 10 ^ p
6               S = S + pareto(a,b)
7           end
```

  × Enfin, on met à jour la vecteur `L` en lui concaténant à droite la valeur stockée dans la variable `S / 10 ^ p`.

  Remarquons que, comme `S` contient la somme de 10^p simulations de la v.a.r. X, la variable `S / 10 ^ p` contient la moyenne des 10^p simulations de X.
  Or, l'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10^p$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. X.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X.
  (les v.a.r. X_i sont indépendantes et de même loi que X)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \;\simeq\; \mathbb{E}(X)$$

  La variable `S / 10 ^ p` est donc une approximation de $\mathbb{E}(X)$.

- **Sortie de la fonction**
  × À la fin de la boucle `for p = 2 : 6`, la variable `L` est donc un vecteur à 5 coordonnées (autant que de valeurs prises par la variable `p`) contenant 5 approximations de $\mathbb{E}(X)$.
  × Plus précisément, la variable `p` prend successivement les valeurs de l'ensemble $[\![2, 6]\!]$.
  Ainsi, la variable `L` contient :
    - en 1ère coordonnée, une approximation de $\mathbb{E}(X)$ obtenue à l'aide de 10^2 simulations de X,

- en $2^{\text{ème}}$ coordonnée, une approximation de $\mathbb{E}(X)$ obtenue à l'aide de 10^3 simulations de X,
- $\cdots$
- en $5^{\text{ème}}$ coordonnée, une approximation de $\mathbb{E}(X)$ obtenue à l'aide de 10^6 simulations de X.

La variable `L` est donc un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$ où X suit une loi de Pareto de paramètres `a` et `b`.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec précision la réponse à cette question. Cependant, fournir la bonne réponse démontre la bonne compréhension de l'algorithme et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question. On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**.
- Il est étonnant que l'énoncé mentionne la notion de liste. Dans beaucoup de langages informatiques, on trouve la distinction entre liste et tableau. Sans trop entrer dans les détails, ces deux objets répondent à des objectifs différents. En général, la distinction s'établit comme suit :
  - × un tableau est un objet dont la taille est fixé à l'avance et ne peut varier. L'accès et la modification d'un élément du tableau se fait de manière rapide.
  - × une liste est un objet dont on peut faire évoluer facilement la taille. Grossièrement, une liste est implantée suivant la logique d'une pile d'assiettes. L'ajout se fait en début de liste (on pose un nouvelle assiette en haut de la pile). L'accès à un élément de la liste requiert de passer en revue tous les éléments de la liste (on dépile les assiettes jusqu'à l'obtention de celle que l'on souhaite).

  En **Scilab**, il n'y a pas vraiment lieu de parler de liste. Ce langage est pensé avec une faible variété de types. L'idée générale est la suivante : « en **Scilab** tout est matrice ». D'ailleurs, l'objet renvoyé par la fonction `mystere` est bien une matrice ligne à 5 éléments (on parle aussi de vecteur). L'implantation du type matriciel en **Scilab** ne nécessite pas que la taille de la matrice soit fixée en amont. On peut donc agir comme le propose le concepteur et ainsi copier l'idée de la liste consistant à ajouter des éléments au fur et à mesure. Mais cela ne semble pas pertinent car on connaît dès le début de la fonction la taille de l'objet renvoyé. Il est donc **fortement recommandé** de penser l'objet `L` plus comme un tableau dont la taille fixée initialement n'évolue plus. Cela peut se faire en initialisant `L` de la manière suivante :

  ```
  L = zeros(1, 5)
  ```

  Cela permet d'allouer une bonne fois pour toute l'espace mémoire nécessaire à la définition de l'objet `L`. On échappe ainsi au risque qu'une nouvelle allocation de mémoire soit nécessaire si la taille de l'objet grandit au-delà de l'espace mémoire alloué initialement.
- Les considérations détaillées dans le point précédent ne sont pas un attendu du programme. Elles sont présentées ici uniquement car le concepteur mentionne la notion de liste, terme non présent dans le programme officiel.

□

d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
    ans =
        1.9306917   1.9411352   1.9840089   1.9977684   2.0012415
--> mystere(3,2)
    ans =
        3.1050951   3.0142956   2.9849407   2.9931656   2.9991517
--> mystere(1,4)
    ans =
        21.053151   249.58609   51.230522   137.64549   40.243918
```

Démonstration.

- L'instruction `mystere(2,1)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1.
  Les 5 valeurs affichées semblent être de plus en plus proche de 2.

  On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors : $\mathbb{E}(X) = 2$.

- L'instruction `mystere(3,2)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2.
  Les 5 valeurs affichées semblent être de plus en plus proche de 3.

  On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors : $\mathbb{E}(X) = 3$.

- L'instruction `mystere(1,4)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4.
  Les 5 valeurs affichées ne semblent pas converger vers une valeur en particulier.

  On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors elle n'admet pas d'espérance.

□

4. a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{a\,b}{a-1}$$

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f(x)\ dx$.
- Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx \;=\; \int_{b}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$$

- De plus, pour tout $x \in [b, +\infty[$:

$$x\,f(x) \;=\; x\ \frac{a\,b^a}{x^{a+1}} \;=\; a\,b^a\ \frac{1}{x^a}$$

- Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$), d'exposant a. Elle est donc convergente si et seulement si $a > 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } a > 1.}$$

- Supposons alors $a > 1$.
Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_b^B x\, f(x)\, dx &= a\, b^a \int_b^B x^{-a}\, dx \\
&= a\, b^a \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right]_b^B \qquad\qquad \textit{(car } a \neq 1\textit{)} \\
&= -\frac{a\, b^a}{a-1} \left[\frac{1}{x^{a-1}} \right]_b^B \\
&= -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(\frac{1}{B^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}} \right)
\end{aligned}$$

Comme $a - 1 > 0$: $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^{a-1}} = 0$. D'où :

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(0 - \frac{1}{b^{a-1}} \right) = -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(-\frac{1}{b^{a-1}} \right) = \frac{a\ \cancel{b^a}}{(a-1)\cancel{b^a}\ b^{-1}} = \frac{a\, b}{a-1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 1 : \mathbb{E}(X) = \frac{a\, b}{a-1}.}$$

Commentaire

On remarque qu'on trouve bien des résultats cohérents avec les résultats obtenus avec **Scilab** en question précédente :

× si X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2 \times 1}{2-1} = 2$$

× si X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3 \times 2}{3-1} = 3$$

× si X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors X n'admet pas d'espérance. □

b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{a\, b^2}{(a-1)^2\, (a-2)}$$

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx$.
- Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx = \int_b^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$$

- De plus, pour tout $x \in [b, +\infty[$:

$$x^2 \, f(x) \;=\; x^2 \, \frac{a \, b^a}{x^{a+1}} \;=\; a \, b^a \, \frac{1}{x^{a-1}}$$

- Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}} \, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$), d'exposant $a-1$. Elle est donc convergente si et seulement si $a - 1 > 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une variance si et seulement si } a > 2.}$$

- Supposons alors $a > 2$.
  Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_b^B x \; f(x) \; dx &= a \, b^a \int_b^B x^{-a+1} \, dx \\
&= a \, b^a \left[\frac{x^{-a+2}}{-a+2} \right]_b^B \qquad \textit{(car } a \neq 2\textit{)} \\
&= -\frac{a \, b^a}{a-2} \left[\frac{1}{x^{a-2}} \right]_b^B \\
&= -\frac{a \, b^a}{a-2} \left(\frac{1}{B^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}} \right)
\end{aligned}$$

Comme $a - 2 > 0$: $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^{a-2}} = 0$. D'où :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; -\frac{a \; b^a}{a-2} \left(0 - \frac{1}{b^{a-2}} \right) \;=\; -\frac{a \; b^a}{a-2} \left(-\frac{1}{b^{a-2}} \right) \;=\; \frac{a \; \cancel{b^a}}{(a-2) \cancel{b^a} \; b^{-2}} \;=\; \frac{a \, b^2}{a-2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 2 : \mathbb{E}(X^2) = \frac{a \, b^2}{a-2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&= \frac{a \, b^2}{a-2} - \left(\frac{a \, b}{a-1} \right)^2 \\
&= ab^2 \left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2} \right) \\
&= ab^2 \left(\frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-2) \; (a-1)^2} \right) \\
&= ab^2 \left(\frac{(\cancel{a^2} - \cancel{2a} + 1) - (\cancel{a^2} - \cancel{2a})}{(a-2) \, (a-1)^2} \right) \\
&= ab^2 \, \frac{1}{(a-2) \, (a-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 2 : \mathbb{V}(X) = \frac{a \, b^2}{(a-2) \, (a-1)^2}.}$$

□

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher à déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit :

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

5. a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,)$.

Démonstration.
Soit $x \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\,[X_k > x]\,) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x)) \\ &= (1 - F_X(x))^n && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ &= \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{b}{x}\right)^3\right)\right)^n && \textit{(d'après } \mathbf{2.}\textit{, car } x \geqslant b\textit{)} \\ &= \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [b, +\infty[,\ \mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}}$$

□

b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k(\Omega) = [b, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[.}$$

- Déterminons F_{Y_n}, la fonction de répartition de Y_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, b[$, alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[$). D'où :

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(\,[Y_n \leqslant x]\,) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}(\,[Y_n \leqslant x]\,) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) & \\ & = & 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{Y_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geqslant b \end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***2.***, on reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi de Pareto de paramètres $3n$ et b.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ suit la loi de Pareto de paramètres } 3n \text{ et } b.}$$

□

c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n$ est un estimateur sans biais de b.

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Démonstration.

- La v.a.r. $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, \min(X_1, \ldots, X_n)$ s'exprime :
  × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la v.a.r. X,
  × sans mention du paramètre b.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y'_n \text{ est donc un estimateur de } b.}$$

- Comme $3n \geqslant 3 > 1$, d'après la question ***4.a)***, la v.a.r. Y_n admet une espérance.
  Ainsi, la v.a.r. Y'_n admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire d'une v.a.r. qui en admet une.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y'_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n\right) & \\ & = & \dfrac{3n-1}{3n}\, \mathbb{E}(Y_n) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{3n-1}{3n}\, \dfrac{3n\, b}{3n-1} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{4.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\ & = & b & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y'_n \text{ est donc un estimateur sans biais de } b.}$$

- Comme $3n \geqslant 3 > 2$, d'après la question ***4.b)***, la v.a.r. Y_n admet une variance.
  Ainsi, la v.a.r. Y'_n admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire d'une v.a.r. qui en admet une.

- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_b(Y'_n) & = & \mathbb{V}(Y'_n) + \big(b_b(Y'_n)\big)^2 & \\ & = & \mathbb{V}(Y'_n) + 0 & \textit{(car } Y'_n \textit{ est un estimateur sans biais de } b\textit{)} \\ & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n\right) & \\ & = & \left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^2 \mathbb{V}(W_n) & \\ & = & \dfrac{\cancel{(3n-1)^2}}{(3n)^2}\ \dfrac{3n\, b^2}{\cancel{(3n-1)^2}\,(3n-2)} & \textit{(d'après les questions } \textbf{4.a)} \textit{ et } \textbf{5.b)}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } r_b(Y'_n) = \dfrac{b^2}{3n\,(3n-2)}}$$

□

6. a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

Démonstration.

- La v.a.r. Z_n admet une variance (donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Z_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{3\,b}{3-1}\right) & \textit{(d'après } \textbf{4.a)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\ \dfrac{3}{2}\, b & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{3}{2}\, b.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(V_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3\,b^2}{(3-1)^2\,(3-2)} & \textit{(d'après } \textbf{4.b)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\ \dfrac{3\,b^2}{4} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(Z_n) = \dfrac{3\,b^2}{4n}.}$$

□

b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel à préciser. Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lll} & \mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{3}{2}\, b & \\ \text{donc} & \dfrac{2}{3}\, \mathbb{E}(Z_n) = b & \\ \text{d'où} & \mathbb{E}\left(\dfrac{2}{3}\, Z_n\right) = b & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{array}$$

  On pose alors $\alpha = \dfrac{2}{3}$. La v.a.r. $Z'_n = \alpha\, Z_n = \dfrac{2}{3}\, Z_n$ s'exprime :
  × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a.r. X,
  × sans mention du paramètre b.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z'_n = \frac{2}{3}\, Z_n \text{ est donc un estimateur de } b.}$$

- La v.a.r. Z'_n admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. Z_n qui en admet une. De plus :

$$b_b(Z'_n) \ = \ b_b(\alpha\, Z_n) \ = \ \mathbb{E}(\alpha\, Z_n) - b \ = \ 0 \qquad \textit{(d'après un point précédent)}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z'_n \text{ est un estimateur sans biais de } b.}$$

- La v.a.r. Z'_n admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. Z_n qui en admet une.
- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_b(Z'_n) & = & \mathbb{V}(Z'_n) + \left(b_b(Z'_n)\right)^2 & \\ & = & \mathbb{V}(\alpha\, Z_n) + 0 & \textit{(car } Z'_n \textit{ est un estimateur sans biais de } b\textit{)} \\ & = & \alpha^2\, \mathbb{V}(Z_n) & \\ & = & \dfrac{4}{9}\, \dfrac{3\, b^2}{4n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{b^2}{3n} & \end{array}$$

$$\boxed{r_b(Z'_n) = \frac{b^2}{3n}}$$

□

7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Démonstration.

- Comme les estimateurs Y'_n et Z'_n de b sont tous les deux sans biais (questions ***5.c)*** et ***6.b)***), le meilleur des deux est celui dont le risque quadratique est le plus faible.

- Or, toujours d'après ***5.c)*** et ***6.b)*** :

$$\begin{array}{rcll} r_b(Y'_n) \leqslant r_b(Z'_n) & \Leftrightarrow & \dfrac{b^2}{3n\,(3n-2)} \leqslant \dfrac{b^2}{3n} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{3n-2} \leqslant 1 & \textit{(car } \dfrac{3n}{b^2} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 3n-2 \geqslant 1 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 3n \geqslant 3 & \end{array}$$

Cette dernière inégalité est vraie car $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, par équivalence, la $1^{\text{ère}}$ aussi.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y'_n \text{ est un meilleur estimateur de } b \text{ que } Z'_n.}$$

□

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de W_n.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $W_n(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto \ln(x)$, de telle sorte que $W_n = h(X_n)$.
  On considère ici $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W_n(\Omega) & = & \big(h(X_n)\big)(\Omega) \;=\; h\big(X_n(\Omega)\big) & \\ & = & h([1,+\infty[) & \\ & = & [h(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[& \textit{(car la fonction } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [1,+\infty[\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[& \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } W_n(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

- Déterminons la fonction de répartition F_{W_n} de W_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors $[W_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $W_n(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_{W_n}(x) = \mathbb{P}([W_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= \mathbb{P}([W_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(X_n) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_n \leqslant \mathrm{e}^x]) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}) \\ &= F_{X_n}(\mathrm{e}^x) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^a && \textit{(car } b = 1 \textit{ et, comme } x \geqslant 0, \ \mathrm{e}^x \geqslant 1) \\ &= 1 - (\mathrm{e}^{-x})^a = 1 - \mathrm{e}^{-ax} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient finalement : } F_{W_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit une loi $\mathcal{E}(a)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } W_n \hookrightarrow \mathcal{E}(a)}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{E}(W_n) = \frac{1}{a} \text{ et } \mathbb{V}(W_n) = \frac{1}{a^2}.}$$

□

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1)$$

a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On cherche ici à appliquer le théorème central limite. On commence donc par déterminer $\overline{W}_n^*$ et on souhaite relier cette v.a.r. à la v.a.r. T_n de l'énoncé.

- Intéressons nous d'abord à la v.a.r. $M_n = \overline{W}_n$.
  - × La v.a.r. M_n admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
  - × De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} W_k\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(W_k) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{a}.}$$

× Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(M_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} W_k\right) & \\
& = & \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} W_k\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(W_k) & \textit{(car les v.a.r. } W_1, \ldots, W_n \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a^2} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\ \dfrac{1}{a^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(M_n) = \dfrac{1}{n\,a^2}.}$$

- Comme la v.a.r. $M_n = \overline{W}_n$ admet une variance non nulle, la v.a.r. $\overline{W}_n^*$ est bien définie. De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\overline{W}_n^* & = & \dfrac{\overline{W}_n - \mathbb{E}(\overline{W}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{W}_n)}} & \\
& = & \dfrac{M_n - \frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{n\,a^2}}} & \textit{(d'après ce qui précède)} \\
& = & \dfrac{M_n - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a\sqrt{n}}} & \\
& = & a\sqrt{n}\left(M_n - \dfrac{1}{a}\right) & \\
& = & \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \overline{W}_n^* = T_n.}$$

- La suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. :
  × indépendantes par lemme des coalitions (car la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes),
  × de même loi $\mathcal{E}(a)$,
  × qui admettent une variance non nulle $\dfrac{1}{a^2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème central limite : } T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}\ ;\ \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Commentaire

- L'énoncé considère ici : $M_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. En effet, dans la cas contraire, les v.a.r. $\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}$ et $\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}$ ne sont pas bien définies.
- Cette hypothèse n'est pas aberrante puisque, d'après la question ***8.*** : $W_n \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$. Ainsi, on peut considérer : $W_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  Comme $M_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} W_k$, on en déduit : $M_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Pour une remarque plus complète sur la notation $W_n(\Omega)$, on se reportera à la question ***2***.

Démonstration.
On cherche à démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) \geqslant 95\%$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions d'abord la probabilité.

$$\begin{array}{cll} & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \leqslant a \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) & \\ = & \mathbb{P}\left([\sqrt{n}-2 \leqslant a\sqrt{n}\,M_n \leqslant \sqrt{n}+2]\right) & \textit{(car } \sqrt{n} > 0 \textit{ et } M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[\textit{)} \\ = & \mathbb{P}\left([-2 \leqslant a\sqrt{n}\,M_n - \sqrt{n} \leqslant 2]\right) & \\ = & \mathbb{P}\left([-2 \leqslant \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1) \leqslant 2]\right) & \\ = & \mathbb{P}\left([-2 \leqslant T_n \leqslant 2]\right) & \end{array}$$

- Or, d'après la question précédente : $T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. D'où :

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([-2 \leqslant T_n \leqslant 2]\right) & = & \mathbb{P}(\,[-2 \leqslant Z \leqslant 2]\,) & \\ & = & \Phi(2) - \Phi(-2) & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\ & = & \Phi(2) - \big(1 - \Phi(2)\big) & \\ & = & 2\,\Phi(2) - 1 & \end{array}$$

- De plus, d'après l'énoncé :

$$\begin{array}{ll} & \Phi(2) \geqslant 0,975 \\ \text{donc} & 2\,\Phi(2) \geqslant 1,95 \\ \text{d'où} & 2\,\Phi(2) - 1 \geqslant 0,95 \end{array}$$

  Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) \geqslant 95\%$$

On en déduit que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \,;\, \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

□