DM1
À RENDRE LE MARDI 17 SEPTEMBRE

EXERCICE 1 : suite récurrente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$par $f(x) = x\ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0;+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire les variations de f.
2. (a) Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que: pour tout $n \in \mathbb{N}, e-1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
4. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0;e-1[$.
   Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2 : Suite récurrente linéaire d'ordre 3 et matrices

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1, u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Que vaut U_0 ?
2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
3. Montrer que si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,alors on a $M = PDP^{-1}$.
4. Expliciter la matrice D^n, et exprimer M^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^nP^{-1}U_0.$$
6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.