

DM10

À RENDRE LE JEUDI 16 JANVIER

EXERCICE

Partie 1 : réduction et puissances d'une matrice

Dans cette partie on considère les matrices $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}I_3$.

1. Déterminer le rang de B . En déduire immédiatement une valeur propre de B .
2. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def poly_mat(P, M)` : qui, prenant en argument une liste $P = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ et une matrice carrée M renvoie la matrice :

$$a_0 I_3 + a_1 M + \dots + a_n M^n.$$

3. On suppose la fonction précédente correctement écrite. A l'aide des instructions ci-dessous et de leur résultat d'exécution présentés ci-dessous :

```
1 import numpy as np
2 B=np.array([[0, 1/3, 1/3], [2/3, 0, 0], [2/3, 0, 0]])
3 P=[0, -4, 0, 9]
4 print(poly_mat(P, B))
```

```
Out [441]:
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])
```

En déduire un polynôme annulateur de B .

4. Déterminer le spectre de B , puis une base de chacun des sous-espaces propres de B .
5. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D de dernière ligne nulle et une matrice inversible P de première ligne $(1 \ -1 \ 0)$ telles que $B = PDP^{-1}$.
6. Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, B^j = PD^j P^{-1}$.
7. Expliciter la matrice P^{-1} .
8. Etablir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^k = P \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j \right) P^{-1}.$$

9. Expliciter, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la première ligne de A^k .

Partie 2 : application en probabilités (khûbes ou facultatif)

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie après le k -ème tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le k -ème tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
 - soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)$ -ème tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)$ -ème tirage,
 - soit X_k a pris la valeur $j \neq 1$, dans ce cas on procède également au $(k+1)$ -ème tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

On dira par la suite que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une **chaîne de Markov**.

10. Reconnaître la loi de X_1 .

11. **Simulation informatique.**

(a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la variable X_k .

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def simul_X(k):
5     x = .....
6     for i in range(k-1):
7         tirage=rd.randint(1,4)
8         if x==1:
9             x = .....
10        else:
11            if tirage!=x:
12                x = .....
13    return x

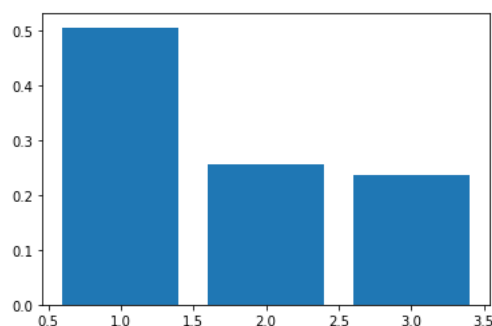
```

(b) On ajoute les commandes suivantes. Expliquer précisément ce qu'elles font. On joint la figure obtenue après leur exécution. Que peut-on conjecturer ?

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 n=50
4 freq_etats=np.zeros(3)
5 for k in range(1000):
6     freq_etats[simul_X(n)-1]+=1
7 freq_etats=freq_etats/1000
8 plt.bar([1,2,3],freq_etats)
9 plt.show()

```



12. On note $V_k = (P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad P(X_k = 3)) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ (appelé le k -ème état probabiliste de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$).

(a) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j)$, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ (appelées probabilités de transitions).

(b) Représenter le graphe probabiliste à trois sommets associé à la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

(c) On admet que $((X_k = i))_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

Vérifier rigoureusement, grâce à la formule des probabilités totales, que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{k+1} = V_k A \text{ où } A \text{ est la matrice définie dans la Partie 1.}$$

(d) Montrer qu'en posant $V_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $V_k = V_0 A^k$.

(e) En déduire que la loi de X_k est donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right), \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right).$$

(f) Calculer l'espérance de X_k .

(g) Déterminer l'unique vecteur ligne $V = (a \quad b \quad c) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tel que $VA = V$ et $a + b + c = 1$.

Le vecteur V est appelé l'état stable $V \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ de la chaîne.

(h) Montrer que la chaîne (X_k) converge (en loi) vers une variable X dont on donnera la loi. Commenter en fonction de la figure de la question 11.(b).