

DM10

CORRECTION

Partie 1 : réduction et puissances d'une matrice

Dans cette partie on considère les matrices $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}I_3$.

1. $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} \in \text{Sp}(A)}$.

```

1 import numpy as np
2 def poly_mat(P,M):
3     A=np.eye(len(M))#matrice identite
4     S=np.zeros(len(M))#initialisation de la somme
5     for i in range(1,len(P)):
6         A=np.dot(A,M)#calcul de la puissance successive M^i
7         S=S+P[i]*A#ajout du terme a_i M^i
8     return S

```

3. Le vecteur $[0, -4, 0, 9]$ représente le polynôme $P(x) = 9x^3 - 4x$.

Le retour informatique donc montre que $P(B) = 0_3$.

Ccl: $P(x) = 9x^3 - 4x$ est un polynôme annulateur de B .

4. D'après le cours, nous savons que $\text{Sp}(B)$ est inclus dans l'ensemble des racines de $P(x)$. Or on a :

$$P(x) = x(9x^2 - 4) = 9x \left(x^2 - \frac{4}{9} \right) = 9x \left(x - \frac{2}{3} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right).$$

Ccl: $\boxed{\text{Sp}(B) \subset \left\{ -\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3} \right\}}$.

• Montrons que $\frac{2}{3}$ est une valeur propre de B et déterminons $E_{\frac{2}{3}}(B) = \text{Ker} \left(B - \frac{2}{3}I_3 \right)$:

$$B - \frac{2}{3}I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg} \left(B - \frac{2}{3}I_3 \right) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

Donc $\frac{2}{3} \in \text{Sp}(B)$ et de plus, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a :

$$X \in E_{\frac{2}{3}}(B) \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow E_{\frac{2}{3}}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

• Montrons que $-\frac{2}{3}$ est une valeur propre de B et déterminons $E_{-\frac{2}{3}}(B) = \text{Ker} \left(B + \frac{2}{3}I_3 \right)$:

$$B + \frac{2}{3}I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg} \left(B + \frac{2}{3}I_3 \right) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

Donc $-\frac{2}{3} \in \text{Sp}(B)$ et de plus, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a :

$$X \in E_{-\frac{2}{3}}(B) \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow E_{-\frac{2}{3}}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

• Montrons que 0 est une valeur propre de B et déterminons $E_0(B) = \text{Ker}(B)$:

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

Donc $0 \in \text{Sp}(B)$ et de plus, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a :

$$X \in E_0(B) \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow E_0(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

De plus d'après le principe de concaténation, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B .

Par conséquent en posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a :

- P inversible comme matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B et P vérifie les consignes de l'énoncé,
- D est évidemment diagonale et vérifie les consignes de l'énoncé
- d'après le cours on a la relation $B = PDP^{-1}$.

5. Par récurrence simple on montre alors que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad B^j = PD^jP^{-1}$.

6. On trouve $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. On sait que $A = B + \frac{1}{3}I_3$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton puisque B et I_3 commutent (vu que I_3 commute avec n'importe quelle matrice).

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^k &= \left(B + \frac{1}{3}I_3 \right)^k \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B^j \left(\frac{1}{3}I_3 \right)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-j} B^j \quad \text{puisque } I_3^{k-j} = I_3 \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-j} PD^jP^{-1} \quad \text{puisque } B^j = PDP^{-1} \\ &= P \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-j} D^j \right) P^{-1} \quad \text{par linéarité (à droite et à gauche) du produit matriciel.} \end{aligned}$$

8. Effectuons le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'après la formule du binôme} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

De plus, la première ligne d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ s'obtient en multipliant cette matrice à gauche par le vecteur ligne $(1 \ 0 \ 0)$:

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, d'après les résultats précédents, la première ligne de A^k est donnée par :

$$\begin{aligned}
 (1 \ 0 \ 0) A^k &= (1 \ 0 \ 0) P \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j \right) P^{-1} \\
 &= (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= (1 \ -\left(-\frac{1}{3}\right)^k \ 0) \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) & \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) & \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Partie 2 : application en probabilités

9. X_1 suit la loi uniforme $\mathcal{U}[[1,3]]$.

10. **Simulation informatique.**

(a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la variable X_k .

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def simul_X(k):
5     x=rd.randin(1,3)
6     for i in range(k-1):
7         tirage=rd.randint(1,4)
8         if x==1:
9             x=rd.randint(1,4)
10        else:
11            if tirage!=x:
12                x=1
13        return x

```

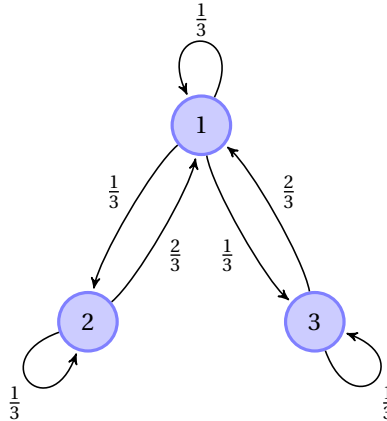
(b) On répète 1000 fois 20 tirages suivant ce processus de Markov.

Conjecture : le vecteur $\left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4}\right)$ représente les fréquences des tirages de la boule 1,2 ou 3.

Conjecture bis : la chaîne converge en loi vers une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [[1,3]]$ dont la loi est donnée par $\left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4}\right)$.

11. On note V_k le k -ème état probabiliste de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

- (a) La probabilité de transition $P_{(X_k=i)(X_{k+1}=j)}$ correspond au coefficient d'indice (i, j) de la matrice $A = A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice définie dans la Partie I.
- (b)



- (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et le système complet d'événements. $((X_k = i))_{i \in \{1,2,3\}}$
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 3)$$

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3).$$

De même on montre que

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 2) &= \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2) \\ P(X_{k+1} = 3) &= \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 3) \end{aligned}$$

Or on a $V_k = (P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad P(X_k = 3))$ donc :

$$\begin{aligned} V_k A &= (P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad P(X_k = 3)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= (\frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3) \quad \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2) \quad \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 3)) \\ &= (P(X_{k+1} = 1) \quad P(X_{k+1} = 2) \quad P(X_{k+1} = 3)) \\ &= V_{k+1}. \end{aligned}$$

Ccl: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad V_{k+1} = V_k A.$

- (d) Sachant que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_{k+1} = V_k A$ on en déduit par une récurrence immédiate que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k = V_0 A^k.$

- (e) La loi de X_k est donnée (sous forme de vecteur ligne) par le vecteur $V_k.$

Par ailleurs $V_k = V_0 A^k$ et $V_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$. De plus, multiplier par la gauche une matrice par $(1 \quad 0 \quad 0)$ revient à en extraire sa première ligne.

Par conséquent V_k représente la première ligne de A^k qui, d'après la Partie I est :

$$\left(\frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) \quad \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) \quad \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) \right)$$

Ccl: la loi de X_k est donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right), \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right).$$

- (f)

$$\begin{aligned} E(X_k) &= 1 \times P(X_k = 1) + 2 \times P(X_k = 2) + 3 \times P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) + 2 \times \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) + 3 \times \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(X_k) = \frac{7}{4}$ puisque $\left(-\frac{1}{3}\right)^k \rightarrow 0$ car $-\frac{1}{3} \in]-1; 1[.$

(g) Déterminons l'état stable $V \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ de la chaîne.

Il s'agit de déterminer V tel que de coordonnées positives et de somme 1 et tel que $VA = V$.

Posons $V = (a \ b \ c)$.

$$\begin{aligned}
 VA = V &\iff (a \ b \ c) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \\
 &\iff \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \quad \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \quad \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c \right) = (a \ b \ c) \\
 &\iff \begin{cases} -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \\ \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b = 0 \\ \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a - 2b = 0 \\ a - 2c = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ -b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = 2c \\ b = c \end{cases} \\
 &\iff V \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Parmi ces vecteurs V on choisit celui qui est normalisé (de somme 1).

Ccl: la chaîne admet un unique état stable $V = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$.

Commentaire : on retrouve bien le vecteur déterminé par la simulation informatique.

(h) On remarque que, puisque $-\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ on a $\left(-\frac{1}{3}\right)^k \rightarrow 0$ et donc :

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 1) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) = \frac{1}{2} \\
 \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 2) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) = \frac{1}{4} \\
 \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 3) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Commentaire : Ceci montre que la chaîne (X_k) converge (en loi) vers une variable X telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ dont la loi est donnée par $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$ ce que l'on a constaté numériquement par la simulation informatique.