

DM11

À RENDRE LE VENDREDI 22 JANVIER

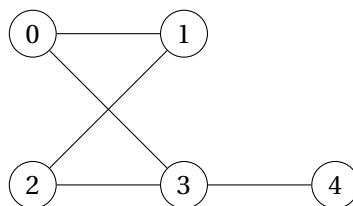
EXERCICE

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres de B .
- La matrice B est-elle diagonalisable ?
- On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que B est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
 - Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base \mathbb{R}^2 .
 - Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
 - Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

PROBLEME

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G .



- Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.
- Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?
 - On considère la fonction Python suivante :

```
def f(M, k):  
    N=a1 . matrix_power(M, k)  
    return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,-----)  
n=B[-----]  
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2.(a).

3. On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G , dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$).
On définit également la matrice L , appelée matrice laplacienne de G , en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

(a) Déterminer la matrice D .

(b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) On identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la question ${}^tX LX$?

(b) Exprimer ${}^tX LX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a :

$${}^tX LX = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2$$

(c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ .

Déterminer LX puis ${}^tX LX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e . En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

(d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5. (a) À l'aide de la question 3.(b), montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \text{Vect}(U)$$

(b) Conclure que $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.