

# DM11

## CORRECTION

### EXERCICE

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } B &\iff B - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (-1-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times (-4) = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\iff \lambda - 1 = 0 \\ &\iff \lambda = 1\end{aligned}$$

Conclusion : la matrice  $B$  admet une unique valeur propre qui est 1.

2. Montrons par l'absurde que  $B$  n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, il existerait une matrice  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible et une matrice  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  diagonale telle que  $B = PDP^{-1}$ . De plus, d'après le spectre de  $B$ , on devrait alors avoir  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , soit  $D = I_2$ . Ainsi, on aurait  $B = PI_2P^{-1}$ , soit  $B = PP^{-1} = I_2$ , ce qui est absurde.

Conclusion : la matrice  $B$  n'est pas diagonalisable.

3. (a) Montrons que la famille  $(v_1, v_2)$  est libre. Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\lambda v_1 + \mu v_2 = (0, 0) &\iff \begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ -\lambda = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille  $(v_1, v_2)$  est libre. Comme de plus, c'est une famille constituée de 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et que  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , on en déduit que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- (b) On calcule  $f(v_1)$  et  $f(v_2)$  en se servant de la matrice  $B$  :

- $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , d'où  $f(v_1) = v_1$ .
- $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , d'où  $f(v_2) = (1, -1) = v_1 + v_2$ .

Par conséquent, la matrice de  $f$  dans la base  $\beta$  est  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (c) La matrice  $B$  est la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et la matrice  $T$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\beta$ . Par les formules de changement de bases, on en déduit que  $B = QTQ^{-1}$ , avec  $Q$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\beta$ , c'est-à-dire

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## PROBLEME

1. On numérote les lignes et colonnes de la matrice  $A$  à partir de 0. Par définition, le coefficient à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  de  $A$  est égal à 1 si les sommets  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête, 0 sinon. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Par lecture du graphe, il y a 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 3, qui sont :  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ , et  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ .
- (b) Le nombre de chaînes de longueur  $k$  reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$  est le coefficient à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  de  $A^k$ . Ainsi, il suffit de calculer le coefficient (2,3) de  $A^3$  :

```
B=f(A,3)
n=B[2,3]
print(n)
```

Ce qui renvoie bien 5.

3. (a) Rappel : le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet. Donc ici, on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Il suffit de faire la soustraction :

$$L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) La matrice  $L$  est diagonalisable car c'est une matrice symétrique réelle.

4. (a) La matrice  ${}^tX$  appartient à  $\mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$  (c'est une matrice ligne) et la matrice  $LX$  appartient à  $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$  (c'est une matrice colonne). Par conséquent, le produit  ${}^tX LX$  appartient à  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ , soit à  $\mathbb{R}$ .

- (b) Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} {}^tX LX &= (a \quad b \quad c \quad d \quad e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \\ &= (a \quad b \quad c \quad d \quad e) \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix} \\ &= a(2a - b - d) + b(-a + 2b - c) + c(-b + 2c - d) \\ &\quad + d(-a - c + 3d - e) + e(-d + e) \end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$${}^tX LX = 2a^2 - 2ab - 2ad + 2b^2 - 2bc + 2c^2 - 2cd + 3d^2 - 2de + e^2$$

Par ailleurs, notons  $x = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$ . Alors

$$\begin{aligned} x &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) \\ &\quad + (d^2 - 2ad + a^2) + (e^2 - 2de + d^2) \\ &= 2a^2 - 2ab - 2ad + 2b^2 - 2bc + 2c^2 - 2cd + 3d^2 - 2de + e^2 \\ &= {}^tX LX \end{aligned}$$

Conclusion :  ${}^tX LX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$ .

(c) Par définition d'un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a  $LX = \lambda X$ , donc  $LX = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}$ . Ainsi,  ${}^tX LX =$

$$(a \ b \ c \ d \ e) \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}, \text{ soit } {}^tX LX = \lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 + \lambda d^2 + \lambda e^2 = \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

En identifiant avec le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

Or,  $X$  est un vecteur propre de  $L$ . Donc au moins un de ses coefficients est non nul. Ainsi,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 > 0$ , ce qui permet de diviser la relation ci-dessus par  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$  :

$$\lambda = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}$$

Et comme le carré d'un réel est toujours positif ou nul, on en déduit que  $\lambda \geq 0$ . Ceci étant valable pour n'importe quelle valeur propre  $\lambda$  de  $L$ , on peut donc conclure que les valeurs propres de  $L$  sont positives ou nulles.

(d) On a  $LU = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Autrement dit,  $LU = 0U$ . Comme  $U \neq 0$ , on en déduit que 0 est valeur propre de  $L$  (et que  $U$  est un vecteur propre associé). De plus, 0 est nécessairement la plus petite des valeurs propres de  $L$  d'après la question précédente. Par conséquent,  $\lambda_1 = 0$ .

5. (a) On résout le système :

$$\begin{aligned}
 LX = 0 &\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ 2a - b - d = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\iff} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -2b + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ -2b + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\iff} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ -4c + 5d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\iff} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_5 \leftarrow L_5 + L_4}{\iff} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ d - e = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ d = e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ c = e \\ d = e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ b = e \\ c = e \\ d = e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = e \\ b = e \\ c = e \\ d = e \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe un } e \in \mathbb{R} \text{ tel que } X = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{Il existe un } e \in \mathbb{R} \text{ tel que } X = eU$$

Autrement dit :  $LX = 0 \iff X \in Vect(U)$ .

(b) On sait (question 3.(c)) que  $L$  est diagonalisable et que (question 4.(d))  $\lambda_1 = 0$ . Par conséquent,  $L$  est semblable

à la matrice diagonale  $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$ , avec  $0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$ .

Si  $\lambda_2$  était nul, alors  $\Delta$ , et donc aussi  $L$ , serait de rang au plus 3. Or, on a vu en résolvant le système  $LX = 0$  à la question précédente, qu'après échelonnement, on obtenait un système de rang 4. Ainsi,  $\lambda_2$  ne peut pas être nul : on a  $0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$ .

Conclusion : les valeurs propres  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  sont strictement positives.

Remarques :

- On pouvait aussi justifier le rang de  $L$  par le théorème du rang. En effet, d'après le résultat de la question précédente,  $\text{Ker}(L)$  est de dimension 1 (il est engendré par un seul vecteur non nul). Donc, par le théorème du rang,  $\text{rg}(L) = 5 - 1 = 4$ .
- Numériquement, on a  $\lambda_2 \approx 0,8299$ ,  $\lambda_3 = 2$  (valeur exacte),  $\lambda_4 \approx 2,6889$ , et  $\lambda_5 \approx 4,4812$ .