

DM12

À RENDRE LE MARDI 28 JANVIER

EXERCICE

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif. On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X , définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

1. En utilisant le changement de variable affine $u = -t$ dans l'intégrale définissant $F_X(-x)$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(-x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt \text{ puis que } F_X(-x) = 1 - F_X(x).$$

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

(a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y , définie par:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y .

(c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y .

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

On dira plus tard en cours que la variable S_n est un estimateur de σ .

(a) Montrer que S_n admet une espérance et la calculer. Déterminer un réel α tel que $T_n = \alpha S_n$ admette une espérance égale à σ .

On dira plus tard en cours que T_n est un estimateur sans biais de σ .

(b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X , puis déterminer $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(S_n)$

(c) Montrer que T_n admet une variance et la calculer. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n)$.

On dira en cours en cours que T_n est un estimateur convergent de σ .