DM12
CORRECTION

EXERCICE

1. C'est du cours. On le redémontre. Soit x un réel quelconque. On a :

$$\begin{aligned}
F_X(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{x} -e^{-u^2/2\sigma^2} du \quad \text{(changement de variable affine } u=-t\text{)} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-u^2/2\sigma^2} du \\
&= \int_{x}^{+\infty} f_X(u)du
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
F_X(x)+F_X(-x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du + \int_{x}^{+\infty} f_X(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= 1 \quad \text{car } f_X \text{ est une densité de probabilité}
\end{aligned}$$

D'où on déduit $\boxed{F_X(-x) = 1 - F_X(x)}$.

2. (a) La variable aléatoire Y est à valeurs positives. Donc donc déjà, pour tout $x<0$, on a $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0$. Ensuite, pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) \\
&= P(|X| \leqslant x) \\
&= P(-x \leqslant X \leqslant x) \\
&= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{car } X \text{ est à densité} \\
&= F_X(x) - (1-F_X(x)) \quad \text{(question précédente)} \\
&= 2F_X(x) - 1
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction de répartition de Y est la fonction F_Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x)-1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

(b) On vérifie les conditions :

- La fonction F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ car elle y est nulle, et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ par opérations algébriques sur des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après le cours). Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

- Elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car elle y est de classe $\mathscr{C}^1$ (cf ci-dessus). Vérifions qu'elle est continue en 0. À gauche de 0, on a :
$$\lim_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$
Et à droite de 0 :
$$\lim_{x\to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x\to 0^+} 2F_X(x)-1 = 2F_X(0)-1$$
Or, $F_X(0) = 1 - F_X(0)$ d'après la question 1, donc $2F_X(0)-1 = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$, ce qui montre que F_Y est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Par conséquent, $\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité}}$. De plus, on peut déduire de F_Y une densité f_Y de Y par dérivation. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_Y(x) = \begin{cases} 2F_X'(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
c'est-à-dire :
$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 2f_X(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$
ou encore :
$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

(c) Pour savoir si Y admet une espérance, on s'intéresse à l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$ car f_Y est nulle sur $]-\infty;0[$. Or, pour tout $A > 0$, on a :
$$\begin{aligned}
\int_0^A t f_Y(t)\,dt &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A \frac{-t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^A \\
&= \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$
Or, $\exp\left(-\dfrac{A^2}{2\sigma^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$ est convergente, et même absolument convergente car $t f_Y(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{Y \text{ admet une espérance}}$.
De plus, d'après le calcul ci-dessus, on a :
$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^{+\infty} t f_Y(t)\,dt \\
&= \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}}(0-1) \\
&= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sigma \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sigma \sqrt{\frac{4}{2\pi}}
\end{aligned}$$
Ce qui donne : $\boxed{E(Y) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}}$.

3. (a) Les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ admettent toutes une espérance. On en déduit que S_n aussi. De plus, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{(question précédente)} \\ &= \frac{1}{n}\times n\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{E(S_n) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$

Posons alors $\boxed{T_n = S_n\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n} Y_k}$. De même que pour S_n, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}E(S_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma$$

Donc $\boxed{E(T_n) = \sigma}$ *et on dira donc que* $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}S_n$ *est un estimateur sans biais de* σ.

(b) $X \hookrightarrow N(0,\sigma^2)$ donc X admet un moment d'ordre 2 et, d'après la formule de K.H., on a $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$.
Autrement dit, $\boxed{\text{le moment d'ordre 2 de } X \text{ est } E(X^2) = \sigma^2}$.
Ensuite, comme $Y = |X|$, on a $Y^2 = X^2$.
Donc $\boxed{Y \text{ admet un moment d'ordre 2 et } E(Y^2) = E(X^2) = \sigma^2}$.
On en déduit que Y admet une variance et que $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \sigma^2 - \sigma^2\frac{2}{\pi}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{V(Y) = \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2 = \frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2}.$$

Ensuite, comme $Y_1,\dots,Y_n$ admettent toutes une variance, S_n en admet une aussi. De plus,

$$\begin{aligned} V(S_n) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) \quad \text{par indépendance de } Y_1,\dots,Y_n \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2 \quad \text{(cf ci-dessus)} \\ &= \frac{1}{n^2}\times n\frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne $\boxed{V(S_n) = \frac{\pi-2}{n\pi}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}$.

(c) $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}S_n$ et S_n admet une variance. Donc T_n aussi et par propriétés de la variance :

$$V(T_n) = \frac{\pi}{2}V(S_n) = \frac{\pi-2}{n\pi}\sigma^2\times\frac{\pi}{2} = \frac{(\pi-2)\sigma^2}{2n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$