

DM13

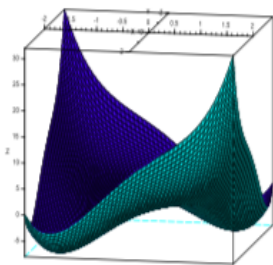
À RENDRE LE MARDI 11 MARS

EXERCICE 1 : fonctions de deux variables

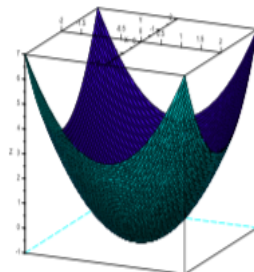
On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

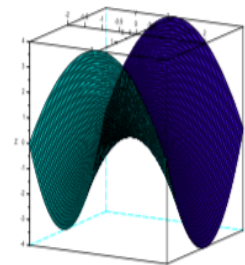
1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
 (b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$
 (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
 (b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
 (c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
 (d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f .
4. (a) Pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 , calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
 (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5. L'une des trois nappes suivantes est associée à f . Laquelle ?
 Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

EXERCICE 2 : fonction d'une variable

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On admet dans la suite que f est une fonction convexe sur $] -\infty, 1[$.

1. Etudier le signe de $f(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 1[$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ à l'aide d'un équivalent puis en déduire la continuité de f sur $] -\infty, 1[$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -\infty, 1[\setminus\{0\}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 1[\setminus\{0\}$.
5. (a) Déterminer le développement limité de $x + \ln(1-x)$ à l'ordre 2 en 0.
 (b) En déduire que f est de classe C^1 sur $] -\infty, 1[$ et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
6. (a) Montrer que $\forall x \in] -\infty, 1[$, $x + \ln(1-x) \leq 0$.
 (b) En déduire les variations de f .
7. A l'aide des questions précédentes, tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. On placera sur le graphique la tangente à f en 0.