DM13
CORRECTION

EXERCICE 1 : fonctions de deux variables

1. f est une fonction polynômiale des 2 variables x et y et par conséquent $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$.

2. (a) On a $\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$ et $\partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x$.

   (b) Le gradient de f est $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{pmatrix}$

<u>Ccl:</u> $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$

(c) (x,y) est donc un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \underset{(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction $x \to x^3$ est bijective , le système équivaut à :

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x^2-2) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

<u>Ccl:</u> f possède donc trois points critiques qui sont : $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

3. (a) On a $\partial^2_{11} f(x,y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2_{22}(f)(x,y) = 12y^2 - 4$ et $\partial^2_{12} f(x,y) = \partial^2_{21} f(x,y) = 4$.

   (b) Les matrices hessiennes de f sont donc :
   $\nabla^2(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\nabla^2\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} et \quad \nabla^2\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$.

   (c) On note λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice hessienne.

   - en $(0,0)$: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -8 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 \end{cases}$
     Le réel 0 est donc valeur propre de la hessienne et <u>la méthode du cours ne permet pas de conclure quant à l'existence (ou non) d'un extrémum pour</u> f au point $(0;0)$.

   - en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 40 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 384 > 0 \end{cases}$
     Ainsi, les 2 valeurs propres de $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ sont deux réels strictement positifs , ce qui permet de conclure que <u>f admet donc en ces deux points un minimum local</u> qui a pour valeur $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.

   (d) On a $f(x,x) = x^4 + x^4 - 2(x-x)^2 = 2x^4 \geqslant 0$ au voisinage de $x = 0$,
   et $f(x,-x) = x^4 + (-x)^4 - 2(x+x)^2 = -8x^2 + 2x^4 \underset{x \to 0}{\sim} -8x^2 \leqslant 0$ au voisinage de $x = 0$.
   On a $f(0,0) = 0$ et donc f change de signe au voisinage de $(0,0)$.
   <u>Ccl :</u> f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

4. (a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, On a :

$$f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2 = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy-x^4+4x^2-4-y^4+4y^2-4-2x^2-2y^2-4xy = -8.$$

   (b) On a donc : $f(x,y) = -8+(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2 \Rightarrow f(x,y) \geqslant -8$, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
   Et comme $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = -8$, $\underline{f \text{ admet un minimum GLOBAL en ces deux points .}}$

5. La première nappe est la seule où la fonction admet deux points où il y a un minimum (global) de même valeur et c'est donc la seule possible pour f.

EXERCICE 2 : fonction d'une variable

1. . $\forall x \in]0,1[\quad \underbrace{(1-x)}_{\in]0,1[}\underbrace{\ln(1-x)}_{<0} < 0$ et $-x<0 \Rightarrow f(x)>0$.

   . $\forall x<0 \quad \underbrace{(1-x)}_{>1}\underbrace{\ln(1-x)}_{>0} > 0$ et $-x>0 \Rightarrow f(x)>0$.

   . $f(0) = 1 > 0$

   <u>Ccl:</u> f est une fonction positive sur $]-\infty,1[$.

2. . En $-\infty$: $\dfrac{-x}{1-x} \underset{x\longrightarrow-\infty}{\sim} 1 \Rightarrow f(x) \underset{x\longrightarrow-\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(1-x)} \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0.$

   . En 1 : on pose $X = 1-x$ avec $x \longrightarrow 1^-$ donc $X \longrightarrow 0^-$.

   On a $f(X) = \dfrac{X-1}{X\ln(X)}$ et de plus $\begin{cases} X-1 \longrightarrow -1 \\ X\ln(X) \longrightarrow 0^- \quad \text{par c.c.} \end{cases} \Rightarrow f(X) \longrightarrow +\infty$ par quotient $\Rightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow1^-} f(x) = +\infty$.

3. On a $\ln(1-x) \underset{x\longrightarrow0}{\sim} -x \Rightarrow f(x) \underset{x\longrightarrow0}{\sim} \dfrac{1}{1-x} \longrightarrow 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x) = 1.$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x) = f(0)$ et donc que f est continue en 0.

   De plus f est continue sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ par quotient de $x \mapsto -x$ et $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ elles mêmes continues.

   <u>Ccl :</u> f est continue sur $]-\infty,1[$.

4. f est de classe C^1 sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ par quotient de $x \mapsto -x$ et $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ elles mêmes de classe C^1.

   De plus, pour tout $x \in]-\infty,1[\setminus\{0\}$ on a :

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)+x}{((1-x)\ln(1-x))^2}.$$

5. (a)

$$\begin{aligned} x+\ln(1-x) &\underset{0}{=} x+(-x)+\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2) \\ &\underset{0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2) \end{aligned}$$

   (b) De la question précédente on déduit que $x+\ln(1-x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
   Or on sait que $(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$.
   Donc par puissance puis quotient on a

$$f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}, \quad \Rightarrow \quad f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$$

   Par conséquent, f est de classe C^1 sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

   <u>Ccl :</u> f est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

6. (a) On pose $h(x) = x + \ln(1-x)$ pour $x \in]-\infty, 1[$.
Ainsi définie h est dérivable, $h(0) = 0$ et de plus $h'(x) = \dfrac{-x}{1-x}$.
Nous obtenons donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty, 1[, \quad h(x) \geqslant 0$.
Ccl: On a bien $\forall x \in]-\infty, 1[, \quad x + \ln(1-x) \geqslant 0$.

(b) En remarquant que $\forall x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{((1-x)\ln(1-x))^2}$, on en déduit que

$$\forall x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

Par ailleurs, on a $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
Ccl: $\forall x \in]-\infty, 1[$ $f'(x) \geqslant 0$ et donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$

7. On sait que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ est l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
Par ailleurs, f étant supposée convexe, sa courbe est située au-dessous de sa tangente.
On a donc l'allure suivante :