DM14

À RENDRE LE MARDI 18 MARS

Chaîne de Markov

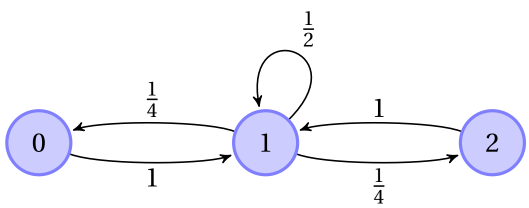
Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.
On pose: $a_n = P(X_n = 0)\,, b_n = P(X_n = 1)\,, c_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = (a_n b_n c_n)$.

1. (a) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
   (b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
   (c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0)\,, (X_n = 1)\,, (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=i)}\left(X_{n+1} = j\right)$, pour tout $(i, j) \in [\![0,2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



   (b) Écrire la matrice de transition $M = \left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = P_{(X_n=i)}\left(X_{n+1} = j\right)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0 , la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.
   (c) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2c) restent valables pour $n = 0$.

4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.
   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E(X_{n+1}) = 1$.
   (c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{V}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

   (b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

7. Montrer que la suite des variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

   (a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

   (b) En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

   (d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

   (e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$$

   (f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

   (g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).