DM14
CORRECTION

Chaîne de Markov

1. (a) La variable X_0 correspond au nombre de boules blanches présentes dans A initialement. D'après l'énoncé, on a $X_0 = 1$ et donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

   (b) Comme il peut y avoir 0,1 ou 2 boules blanches, on a $X_1(\Omega) = \{0,1,2\}$.

   - On a $X_1 = 0$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule blanche dans l'urne A et une boule noire dans l'urne B. Chaque tirage étant indépendant, on a :
   $$a_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   - On a $X_1 = 2$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule noire dans l'urne A et une boule blanche dans l'urne B. Chaque tirage étant indépendant, on a :
   $$a_2 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   - Comme $X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $([X_1 = 0],[X_1 = 1],[X_1 = 2])$, est un système complet d'évènement et on a donc:
   $$a_1 = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise les même arguments que précedemment: il y a dans l'urne 0,1 ou deux boules blanches donc on a $X_n(\Omega) = \{0,1,2\}$. D'après le cours, $([X_n = 0],[X_n = 1],[X_n = 2])$ est donc un système complet d'évènement.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $([X_n = 0],[X_n = 1],[X_n = 2])$ est un système complet d'évènement, on a:
   $$a_n + b_n + c_n = P([X_n = 0]) + P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'évènement $(X_n = 0)$ soit réalisé. Dans ce cas l'urne A contient deux boules noires et l'urne B contient forcément deux boules blanches. Le tirage va donc forcément aboutir à ce que chaque urne contienne une boule noire et une boule blanche. On a donc:

   - $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0.$
   - $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1.$
   - $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0.$

   Supposons maintenant que l'évènement $(X_n = 1)$ soit réalisé. On est alors dans la même situation qu'avant le premier tirage. On a donc:

   - $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}.$
   - $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$
   - $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}.$

   Supposons maintenant que l'évènement $[X_n = 2]$ soit réalisé. On est alors dans une situation symétrique à celle où $[X_n = 0]$, où les rôles des boules noires et des boules blanches sont inversées. On a alors:

- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0$.

Ces probabilités correspondent bien aux poids des arêtes du graphe donné dans l'énoncé.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a:

$$M = \left(P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somme des éléments de chaque ligne de la matrice est bien égal à 1 (on dit que la matrice M est stochastique).

(c) D'après la question **1)c)** , $([X_n=0],[X_n=1],[X_n=2])$ est un système complet d'évènement. On peut alors utiliser la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(X_{n+1}=0) \\ &= P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)+P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)+P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) \\ &= \frac{b_n}{4}. \\ b_{n+1} &= P(X_{n+1}=1) \\ &= P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) \\ &= a_n+\frac{b_n}{2}+c_n. \\ c_{n+1} &= P(X_{n+1}=2) \\ &= P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)+P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)+P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) \\ &= \frac{b_n}{4}. \end{aligned}$$

3. Rappelons qu'on a $(a_0,b_0,c_0)=(0,1,0)$ et $(a_1,b_1,c_1)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Vérifions les relations de la question précédente:

- $\dfrac{b_0}{4}=\dfrac{1}{4}=a_1=c_1$,
- $a_0+\dfrac{b_0}{2}+c_0=\dfrac{1}{2}=b_1$.

Les relations de la question précédente sont donc bien vérifiées.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que X_{n+1} étant une variable aléatoire finie, l'espérance est bien définie. On a:

$$E(X_{n+1}) = 0\times P(X_{n+1}=0)+1\times P(X_{n+1}=1)+2\times P(X_{n+1}=2) = b_{n+1}+2c_{n+1}.$$

(b) Remarquons que d'après la question **2)c)**, on a $a_{n+1}=c_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = b_{n+1}+2c_{n+1} = b_{n+1}+a_{n+1}+c_{n+1}=1.$$

(c) Si $n\in\mathbb{N}^*$, cette relation se déduit immédiatement des deux questions précédentes. Si $n=0$, on a $b_0+2c_0=1+2\times 0=1$.

5. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Remarquons d'abord que:

$$U_nV = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a_n-b_n+2c_n$$

On a alors:

$$U_{n+1}V = 2a_{n+1}-b_{n+1}+2c_{n+1} = 2\frac{b_n}{4}-a_n-\frac{b_n}{2}-c_n+2\frac{b_n}{4} = -a_n+\frac{b_n}{2}-c_n = \frac{-1}{2}(2a_n-b_n+c_n) = \frac{-1}{2}U_nV.$$

La suite $(U_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V$. Or, on a montré que $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et de premier terme $U_0 V = -1$. On en déduit que:

$$2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après les questions **1)a)** et **2)c)** que $a_n = c_n$ pour tout entier n. D'après la question **4)c)**, on a $b_n = 1 - 2c_n = 1 - 2a_n$. D'après la question **5)b)**, on a alors:

$$-\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 2a_n - b_n + 2c_n = 2a_n - (1 - 2a_n) + 2a_n = 6a_n - 1$$

On en déduit que $a_n = c_n = \dfrac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6}$.

On déduit ensuite que $b_n = 1 - 2a_n = 1 - \dfrac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{3} = \dfrac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3}$. Les valeurs de a_n, b_n et c_n nous permettent de déduire directement la loi de X_n.

7. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit d'étudier les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors:

- $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6} = \dfrac{1}{6}$.
- $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

On en déduit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par:

$$(P(X=0), P(X=1), P(X=2)) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

8. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'égalité de l'énoncé:

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 2M^3.$$

(b) On déduit de la question précédente que le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - X$ est annulateur de M. Déterminons les racines de P. On a $P(X) = X(2X^2 - X - 1)$ donc il suffit de déterminer les racines de $2X^2 - X - 1$. Le discriminant de $2X^2 - X - 1$ est donné par $\Delta = 9$ et les racines sont données par $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. D'après les cours, on a alors que $\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$. Il reste alors à vérifier si chacune des racines λ de P est valeur propre ou pas de M.

- **Cas** $\lambda = -\dfrac{1}{2}$**.** Déterminons le rang de $M + \dfrac{1}{2} I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Notons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de la matrice. On remarque qu'on a $L_1 + L_3 = 2L_2$ sans pour autant que les trois lignes soient colinéaires. On en déduit que $\mathrm{rg}(M + \dfrac{1}{2} I_3) = 22$, que la matrice $M + \dfrac{1}{2} I_3) = 2$ n'est donc pas inversible et $-\frac{1}{2}$ est une valeur propre de M.

- **Cas $\lambda = 0$.** Déterminons le rang de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La première et la troisième ligne sont égales et ne sont pas colinéaires à la seconde, on a donc $\mathrm{rg}(M) = 2$. La matrice M n'est donc pas inversible et 0 est une valeur propre de M.
- **Cas $\lambda = 1$.** Déterminons le rang de $M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Remarquons qu'on a $L_1 + L_3 = -4L_2$ sans que les trois lignes soient colinéaires, on a donc $\mathrm{rg}(M - I_3) = 2$. La matrice $M - I_3$ n'est donc pas inversible ce qui prouve que 1 est valeur propre de M.

On donc $\mathrm{Sp}(M) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$. De plus pour chaque valeur propre λ, on a montré que $\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) = 2$. D'après le théorème du rang, cela implique que $\dim E_\lambda = 1$. Ainsi pour trouver une base de chaque sous-espace propre, il suffit de trouver un vecteur propre.

- **Base de E_1.** Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}$. Le triplet (x, y, z) est alors solution du système

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 0 \\ \frac{x}{4} + y + \frac{z}{4} = 0 \\ y + \frac{z}{2} = 0 \end{cases}$$

  On laisse au lecteur le soin de vérifier que les solutions de ce système sont de la forme $\left(-2y, y, -2y\right)$ où $y \in \mathbb{R}$. Une base de $E_{-\frac{1}{2}}$ est donc donné par $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.
- **Base de E_0.** On vérifie que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ est une base de E_0 est donc donnée par $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.
- **Base de E_1** On vérifie que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de E_1 est donc donnée par $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Remarque: Pour les cas de E_0 et E_1, le lecteur peut résoudre un système si il n'arrive pas à trouver immédiatement les vecteurs propres (mais cela prend un peu plus de temps). Pour gagner du temps et trouver les vecteurs propres sans avoir à résoudre un système, lecteur pourrait remarquer que les colonnes de la matrice P de la question suivante donne les potentiels vecteurs propres.

(c) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P. D'après la question précédente, ces vecteurs sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes et forment alors une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On en conclut que $\mathrm{rg}(P) = 3$ et que la matrice P est donc inversible.

(d) On a d'une part

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien $MP = PD$. Comme P est inversible, cela implique que $M = PDP^{-1}$ et donc que M est diagonalisable.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$U_n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_n}{4} & a_n + \frac{b_n}{2} + c_n & \frac{a_n}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

(f) Montrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n=0$, on a $U_0M^0 = U_0I_3 = U_0$. L'égalité est bien vérifiée.
- **Hérédité.** Soit n un entier tel que $U_n = U_0M^n$. Alors, en utilisant la question précédente, on a:

$$U_{n+1} = U_nM = U_0M^nM = U_0M^{n+1}.$$

- **Conclusion.** L'égalité est vraie pour $n=0$ et l'hérédité a été démontrée, on a donc bien que pour tout entier n, $U_n = U_0M^n$.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de a_n, b_n et c_n, la loi de X_n est donnée par les coefficients de U_n, Il suffit donc de calculer $U_0.M^n$.

- Remarquons que comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il suffit de calculer la seconde ligne de M^n.
- Ensuite, en utilisant la question **8)d)**, on peut démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$.
- Enfin, après avoir déterminé P^{-1} par l'algorithme du pivot de Gauss, on peut trouver par le calcul la seconde ligne de M^n.