

CORRECTION DU DM1

EXERCICE 1 : Étude d'une suite récurrente

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x \ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



1. (a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ par composition de fonctions elles-mêmes de classe \mathcal{C}^2 . De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}$$

- (b) L'idée est de faire le tableau de variation de la fonction f' pour déduire son signe puis déduire les variations de f :

Le point de départ de cette étude est donc le signe de $f''(x) = \frac{2+x}{(1+x)^2}$ qui est évidemment positif sur \mathbb{R}_+ .

x	0	$+\infty$
signe de $f''(x)$	+	
variations de f'		
signe de f'	+	
variations de f		

Avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$ par produit de limites.

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = x(\ln(1+x) - 1)$$

Or $x \geq 0$ et

$$\ln(1+x) - 1 \geq 0 \iff \ln(1+x) \geq 1 \iff 1+x \geq e^1 \iff x \geq e-1.$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	$e-1$	$+\infty$
signe de $g(x)$	-	0	+

- (b) La suite (u_n) est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue (et même \mathcal{C}^2) sur \mathbb{R}_+ , donc par passage à la limite, toute limite éventuelle $\ell \in \mathbb{R}$ de (u_n) est un point fixe de f sur \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire,

$$\ell \in \mathbb{R}_+ \text{ vérifie } \ell = f(\ell) \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = e-1.$$

Conclusion : la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\boxed{\ell = e-1}$.

3. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1; +\infty[$.

- (a) Montrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.

• **Initialisation** : on suppose $u_0 \in e-1; +\infty[$ et $u_1 = f(u_0)$ donc par croissance de f on a bien $f(u_0) > f(e-1) \iff u_1 > e-1$ puisque $f(e-1) = e-1$ (point fixe de f).

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n . Par croissance de f on a donc l'équivalence suivante :

$$e-1 < u_n < u_{n+1} \quad f(e-1) < f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad e-1 < u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

• **Conclusion** : D'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, e-1 < u_n \leq u_{n+1}}$.

- (b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. Supposons la majorée. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait alors convergente.

Or nous avons vu à la question 2.(b) que la seule limite possible de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\ell = e-1$.

Par conséquent, on aurait $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante, avec $u_0 > e-1$ et convergente vers $\ell = e-1$.

Ceci est absurde !

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et non-majorée, $\boxed{\text{elle diverge donc vers } +\infty}$.

4. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0; e-1[$.

On démontrerait en suivant le même raisonnement qu'à la question 3.(a) que dans ce cas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} < e-1$.

D'après la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle converge vers sa seule limite possible, soit $\ell = e-1$.

Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e-1}$.

EXERCICE 2 : Suite récurrente linéaire d'ordre 3 et matrices

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1, u_2 = 2$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

$$1. U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ La matrice } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est telle que, pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n.$$

3. Vérifions que P est bien inversible et calculons son inverse à l'aide de la méthode de GAUSS-JORDAN.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3$$

On voit donc que P est inversible car la matrice obtenue à ce stade est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array} \right) L_3 \leftarrow 1/6L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après un simple calcul matriciel on obtient bien la relation $M = PDP^{-1}$.

4. La matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ étant diagonale on a immédiatement $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Par ailleurs comme $M = PDP^{-1}$ on peut (**et on doit**) montrer par une récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$

5. D'une part, u_n est le premier coefficient de la matrice $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ ainsi

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_n.$$

D'autre part, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0$ par une récurrence immédiate **à faire**.

Enfin d'après les questions précédentes $M^n = PD^nP^{-1}$. Donc on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^nP^{-1}U_0.$$

6. Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n , il suffit de faire les produits matriciels précédents :

$$\begin{aligned}
u_n &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} (2^n \ 1 \ (-1)^n) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} (2^{n+1} + 3 + (-1)^n)
\end{aligned}$$

Ccl: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{6} (2^{n+1} + 3 + (-1)^n).$