

DM2

À RENDRE LE JEUDI 26 SEPTEMBRE

EXERCICE 1 : Développement asymptotique de la série harmonique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la série harmonique est la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (a) En utilisant la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$, montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
(c) En déduire un équivalent de H_n .

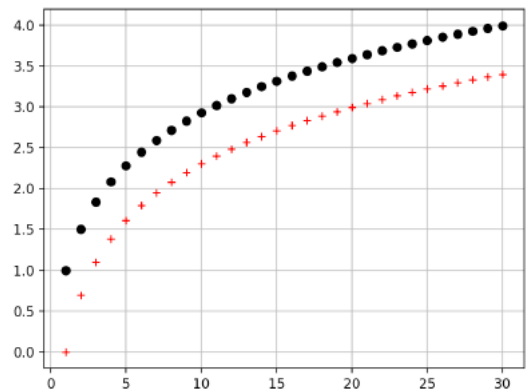
- On pose, pour tout $n \geq 2$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

- Montrer que, $\forall x > -1$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. *Indication : étudier $u_n - u_{n-1}$ et $v_n - v_{n-1}$.*
- En déduire l'existence d'un réel γ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Remarque : la constante γ s'appelle la constante d'Euler et vaut approximativement 0.577.

- Compléter le code suivant pour qu'il affiche la sortie graphique ci-après illustrant le caractère divergent de la série harmonique :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def serie_h(n):
5     return np.cumsum([ ..... ])
6
7 n = .....
8 N = [k for k in range(1, n+1)]
9 Y = .....
10 Z = [np.log(k) for k in N]
11 plt.grid()
12 plt.plot( ..., 'ko')
13 plt.plot( ..., 'k+')
14 plt.show()
```



EXERCICE 2 (khûbe obligatoire) : Étude d'une suite implicite (d'après oral HEC)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
 - (a) Étudier les variations de f_n sur \mathbb{R}_+ .
 - (b) Montrer que f_n s'annule sur \mathbb{R}_+ en un unique réel x_n et montrer que $x_n > 1$.
2. En cherchant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) décroît.
3. Montrer que (x_n) converge vers 1.
4.
 - (a) Montrer que $h : x \mapsto x(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur \mathbb{R}_+ .
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = x_n^n$. En exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(u_n)$ en fonction de x_n , montrer que (u_n) converge vers $(1 + \sqrt{5})/2$.
 - (c) Déterminer un équivalent simple de $x_n - 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.