

CORRECTION DU DM2

EXERCICE 1 : Développement asymptotique de la série harmonique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la série harmonique est la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. (a) Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur \mathbb{R}^* , pour tout $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall t \in [k; k+1] &\Rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \\ \bullet \quad \forall t \in [k-1; k] &\Rightarrow \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \Rightarrow \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien $\forall k \geq 2 \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$.

- (b) Soit $n \geq 2$.

En sommant toutes ces inégalités pour tout $k \in [[2; n]]$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \\ \Leftrightarrow \int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt &\leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \quad \text{par la relation de Chasles : } \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt = \int_1^n f(t) dt \\ \Leftrightarrow [\ln(t)]_2^{n+1} &\leq H_n - 1 \leq [\ln(t)]_1^n \\ \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln(2) &\leq H_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1) \\ \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln(2) + 1 &\leq H_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1) + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien $\forall n \geq 2, \quad \ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

- (c) On constate aisément que les deux suites qui encadrent H_n sont équivalentes à $\ln(n)$.

C'est évident pour $\ln(n) + 1 \sim \ln(n)$ et un peu moins direct pour $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \sim \ln(n+1)$. Mais en remarquant que $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$ on constate bien que $\ln(n+1) = \ln(n) + o(\ln(n))$ et donc que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, en divisant l'encadrement précédente par $\ln(n) > 0$ on a :

$$\frac{\ln(n+1) - \ln(2) + 1}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)}.$$

Par conséquent, en appliquant le théorème d'encadrement de limites (dit des Gendarmes) on en déduit que $\frac{H_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$.

Conclusion : $H_n \sim \ln(n)$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

(a) Montrons que : $\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \underset{(1)}{\leq} \ln(1+x) \underset{(2)}{\leq} x$.

On va démontrer cet encadrement en démontrant les inégalités (1) et (2) séparément.

• pour l'inégalité (1) on considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; +\infty[$ par théorèmes généraux.

De plus, $\forall x > -1, g'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$.

Il s'ensuit que g présente un maximum sur $] -1; +\infty[$ valant $g(0) = 0$.

Ccl : $\forall x > -1, g(x) \leq 0$ ce qui prouve l'inégalité (1).

• pour l'inégalité (2) on considère la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x) - x$ de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; +\infty[$ par théorèmes généraux.

De plus, $\forall x > -1, h'(x) = -\frac{x}{1+x}$.

Il s'ensuit que h présente un maximum sur $] -1; +\infty[$ valant $h(0) = 0$.

Ccl : $\forall x > -1, h(x) \leq 0$ ce qui prouve l'inégalité (2).

(b) Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_n - u_{n-1} &= H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{car } H_n - H_{n-1} = \frac{1}{n} \text{ et par prop du logarithme} \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\geq 0 \quad \text{en appliquant l'inégalité (2) avec } x = -\frac{1}{n} > -1 \end{aligned}$$

Ccl : (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} \bullet \quad v_n - v_{n-1} &= u_n - \frac{1}{n} - u_{n-1} + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \quad \text{en utilisant le calcul précédent } u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n-1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{n-1} - \frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{en appliquant l'inégalité (2) avec } x = -\frac{1}{n} > -1 \\ &\leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} = 0 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Ccl : (v_n) est décroissante.

• on a également $u_n - v_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

(c) D'après le théorème de convergence des suites adjacentes, on en déduit que (u_n) et (v_n) sont convergentes et convergentes vers la même limite que l'on peut noter γ .

En particulier :

$$u_n - \gamma \rightarrow 0 \iff H_n - \ln(n) - \gamma = o(1) \iff H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

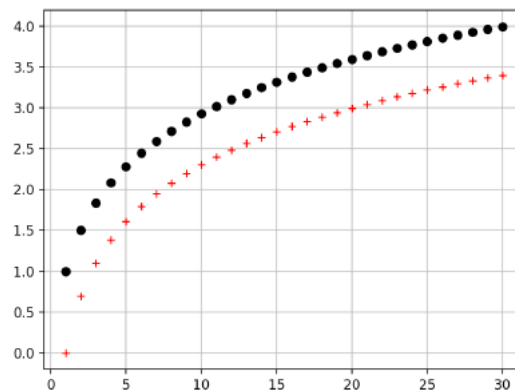
Remarque : la constante γ s'appelle la constante d'Euler et vaut approximativement 0.577.

3. Le code suivant affiche la sortie graphique ci-après :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def serie_h(n):
5     return np.cumsum([1/k for k in
6         range(1:n+1)])
7
8 n=30
9 N=[k for k in range(1,n+1)]
10 Y=[serie_h(k) for k in range(1,n+1)]
11 Z=[np.log(k) for k in N]
12 plt.grid()
13 plt.plot(Y, 'ko')
14 plt.plot(Z, 'k+')
15 plt.show()

```



Cela illustre le caractère divergeant de la série harmonique

EXERCICE 2 (khûbe obligatoire) : Étude d'une suite implicite (d'après oral HEC)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) La f_n est une fonction polynomiale sur \mathbb{R}_+ . Elle est donc dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}).

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - (n+1)x^n \Rightarrow \boxed{f'_n(x) = x^n((2n+1)x^n - (n+1))}$.

On en déduit donc que, pour $x \geq 0$:

$$f'_n(x) \geq 0 \iff (2n+1)x^n - (n+1) \geq 0 \iff x^n \geq \frac{n+1}{2n+1} > 0 \iff x \geq \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

En notant $m_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

De plus,

$$f_n(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	m_n	$+\infty$
signe de $f'_n(x)$	-	0	+
variations de f_n	-1	$f_n(m_n)$	$+\infty$

Remarque : comme $m_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \in]0; 1[$ on en déduit que $m_n^{2n+1} \leq m_n^{n+1}$ et donc que $f_n(m_n) \leq -1$ ce qui est rassurant !

(b) D'après la remarque ci-dessus, on constate que f_n ne prend pas la valeur 0 sur l'intervalle $[0; m_n]$.

Néanmoins, sur $[m_n; +\infty[$, la fonction f_n est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de ce $[m_n; +\infty[$ sur $[f_n(m_n); +\infty[$.

Par ailleurs, toujours d'après la remarque plus haut $f_n(m_n) \leq -1$, donc on a bien $0 \in [f_n(m_n); +\infty[$.

On en conclut que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[m_n; +\infty[$ que l'on notera x_n .

Enfin en comparant $f_n(1)$ à 0 on en déduit une comparaison de x_n avec 1 :

$$f_n(1) = -1 \Rightarrow f_n(1) < f_n(x_n) = 0 \Rightarrow 1 < x_n.$$

par croissance de f_n

Conclusion : x_n est bien l'unique solution sur \mathbb{R}_+ de l'équation $f_n(x) = 0$ et de plus $x_n > 1$.

2. Vu que les termes de la suite (x_n) sont dans l'intervalle $[1; +\infty[$, alors par croissance de f_{n+1} , si nous montrons que $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$ on aura la relation $x_n > x_{n+1}$ ce qui démontrera la décroissance de (x_n) .

Or, par définition de la suite (x_n) , on a $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, il suffit de montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.

Rappelons tout d'abord que $f_n(x_n) = 0$ ce qui peut se traduire par $x_n^{2n+1} = x_n^{n+1} + 1$

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} - x_n^{n+2} - 1 = x_n^2 \cdot x_n^{2n+1} - x_n^{n+2} - 1 = x_n^2(x_n^{n+1} + 1) - x_n^{n+2} - 1 = \underbrace{(x_n^{n+2} + x_n + 1)}_{>0} \underbrace{(x_n - 1)}_{>0}.$$

Ce qui prouve que $f_{n+1}(x_n) > 0$ et donc par l'argument précédent que la suite (x_n) décroît.

3. La suite (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 1$.

Supposons que $\ell > 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ell$ on a $u_n^n \geq \ell^n$. Mais si $\ell > 1$ alors $\ell^n \rightarrow +\infty$, on en déduit par comparaison que $u_n^n \rightarrow +\infty$.

Par conséquent en passant à la limite dans l'égalité $f_n(x_n) = 0 \iff x_n^{2n+1} - x_n^{n+1} - 1 = 0 \iff x_n^{2n+1} - x_n^{n+1} = 1$ on a :

$$x_n^{2n+1} - x_n^{n+1} = x_n^{n+1}(x_n^n - 1) \rightarrow +\infty,$$

ce qui est absurde puisque cette suite est constante égale à 1.

Conclusion : $\ell = 1$ et $x_n \rightarrow 1$.

4. (a) La fonction $h : x \mapsto x(x-1)$ est polynomiale donc dérivable (et donc continue) sur $[1; +\infty[$.

De plus $\forall x > 1$, $h'(x) = 2x - 1 > 0$, donc elle est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection croissante de $[1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+ (puisque $h(1) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$).

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = x_n^n$.

En remarquant que $f_n(x_n) = 0 \iff x_n^{2n+1} - x_n^{n+1} = 1 \iff x_{n+1}(x_n^n - 1) = 1$ et avec $x_n \neq 0$ on a : $x_n^n(x_n^n - 1) = \frac{1}{x_n}$

$$h(u_n) = h(x_n^n) = x_n^n(x_n^n - 1) \Rightarrow h(u_n) = \frac{1}{x_n}.$$

Il s'ensuit que

$$u_n = h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right) \text{ avec } \frac{1}{x_n} \rightarrow 1.$$

Ainsi par continuité de h^{-1} en 1, on en déduit que (u_n) converge vers le réel $h^{-1}(1)$.

Or $h^{-1}(1)$ est l'unique solution dans $[1; +\infty[$ de l'équation $h(x) = 1 \iff x(x-1) = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$ qui donne classiquement le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc $u_n \rightarrow \phi$.

- (c) De la relation $\frac{1}{x_n^{n+1}} = x_n^n - 1$, on en déduit que $(n+1) \ln(x_n) = -\ln(x_n^n - 1)$.

Or $\ln(u) \underset{1}{\sim} u - 1$ donc quand $n \rightarrow +\infty$, $(n+1) \ln(x_n) \sim n(x_n - 1)$ alors que $-\ln(x_n^n - 1) \sim -\ln(\phi - 1)$.

On a classiquement que $-\ln(\phi - 1) = \ln(\phi)$, il s'ensuit alors que lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$n(x_n - 1) \sim \ln(\phi) \Rightarrow x_n - 1 \sim \frac{\ln(\phi)}{n}.$$