

# DM3

## À RENDRE LE MARDI 8 OCTOBRE

### EXERCICE

Dans tout l'exercice,  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement  $I_3$  et  $0_3$  la matrice identité et la matrice nulle de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

On considère l'ensemble suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M^2 = M\}.$$

### Partie I

1.  $F$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ? Si oui, déterminer une base de  $F$  et préciser la dimension de  $F$ .
2.  $G$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ? Si oui, déterminer une base de  $G$  et préciser la dimension de  $G$ .

3. Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Démontrer que  $A \in F \cap G$ .
- (b) Déterminer  $rg(A)$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ?

### Partie II

On considère dans cette partie une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$  de  $F$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer alors que :  $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$ .

5. On note  $B = I_3 - A$ . Démontrer que  $(A, B)$  est une base de  $F$ .

6. (a) Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $M = \alpha A + \beta B$ .

- (b) Calculer  $AB$  et  $BA$ .

- (c) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ .

7. (a) Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ .

- (b) Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$ .

*Indication : On rappelle que si  $M$  est inversible alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice  $M^n$  est inversible et on note  $(M^n)^{-1} = M^{-n}$ .*

**Partie III**

Soient  $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On considère la suite  $(X_n)$  de matrices colonnes définie par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y.$$

8. Calculer la matrice  $I_3 - T$  et exprimer cette matrice en fonction de  $A$  et  $B$ .
9. À l'aide de la question ??, calculer la matrice  $(I_3 - T)^{-1}$ .
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne  $L$ , que l'on déterminera, telle que :  $L = TL + Y$ .
11. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$ , puis que :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n - L = T^n(X_0 - L)$ .
12. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $X_n$  en fonction de  $A, B, L, X_0$  et  $n$ .