

CORRECTION DU DM3

EXERCICE

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère l'ensemble suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M^2 = M\}.$$

Partie I

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ccl: F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F .

De plus les **deux** matrices sont clairement non-colinéaires, donc la famille est libre.

Ccl: la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ étant libre et génératrice de F , c'est une base de F et $\dim(F) = 2$.

2. *Remarquons que dans la définition de G l'égalité $M^2 = M$ implique un "carré". Cela peut nous indiquer que nous n'avons pas à faire à un sous-espace vectoriel qui doit être stable par combinaisons "linéaires".*

Montrons que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Les deux premiers points de la définition sont vérifiés, donc cherchons à mettre en défaut la stabilité par combinaison linéaires.

Prenons par exemple : $M = I_3$.

- On a $I_3^2 = I_3$ donc $I_3 \in G$
- mais $(2I_3)^2 = 4I_3$ donc $2I_3 \notin G$.

Ccl: G n'est pas stable par combinaisons linéaires donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) • Il est clair que $A \in F$ car $A = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• On calcule $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $A^2 = A$ et donc $A \in G$.

Ccl: $A \in F$ et $A \in G$ donc $A \in F \cap G$.

(b) Déterminons $rg(A)$.

$$\begin{aligned} rg(A) &= rg\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

En effet les deux lignes de cette matrices représentent des vecteurs non colinéaires.

Ccl: On a $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $rg(A) < 3$ donc A n'est pas inversible.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Calculons M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & b^2 + 2ab & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$M^2 = M \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b^2 + 2ab = b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ccl: } M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

(b) Résolvons le système (non linéaire) suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a^2 + 2(1-2a)^2 = a \\ b+2a-1 = 0 \quad (b \neq 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 9a^2 - 9a + 2 = 0 \\ b = 1 - 2a \quad (b \neq 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement on trouve les solutions suivantes :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases} \iff (a, b) \in \{(0, 0), (1, 0), (2/3, -1/3), (1/3, 1/3)\}.$$

D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} / \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \{(0, 0), (1, 0), (2/3, -1/3), (1/3, 1/3)\} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\} \end{aligned}$$

$$\text{En effet : } I_3 - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ccl: } \boxed{F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}}.$$

5. On note $B = I_3 - A$.

D'après la question précédente, $B = I_3 - A$ est dans F . De plus il est clair que A et B sont **deux** matrices non colinéaires.

La famille (A, B) est donc une famille libre de deux vecteurs de F qui est de dimension 2.

$$\text{Ccl: } \boxed{(A, B) \text{ est donc une base de } F}.$$

6. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminons deux réels α et β tels que : $M = \alpha A + \beta B$.

On a :

$$\begin{aligned} M = \alpha A + \beta B &\iff \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & -\alpha + \beta & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3a \\ -\alpha + \beta = 3b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\alpha = 3(a-b) \\ \beta = 3b + \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = a - b \\ \beta = a + 2b \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ccl: } \boxed{M = \alpha A + \beta B \text{ avec } \alpha = a - b \text{ et } \beta = a + 2b}.$$

(b) On montre par un simple calcul matriciel que $AB = BA = 0_3$.

(c) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

initialisation : pour $n = 0$ on a $M^0 = I_3$ et $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = I_3$ puisque $B = I_3 - A$.

hérédité : Supposons que $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \cdot M \\ &= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B) && \text{par H.R.} \\ &= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta AB + \alpha \beta^n BA + \beta^{n+1} B^2 \\ &= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B && \text{car } A^2 = A, B^2 = B \text{ et } AB = BA = 0_3 \end{aligned}$$

Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. (a) • Si $\alpha = 0$ alors $M = \beta B$ et $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car B est une matrice de rang 1. De

même si $\beta = 0$ alors $M = \alpha A$ et on a vu que A n'était pas inversible.

Remarquons que $A + B = I_3$, puisque $B = I_3 - A$.

• Supposons $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors en s'inspirant de la question précédente, on calcule :

$$\begin{aligned} M \times \left(\frac{1}{\alpha} A + \frac{1}{\beta} B \right) &= (\alpha A + \beta B) \times \left(\frac{1}{\alpha} A + \frac{1}{\beta} B \right) && \text{d'après la question 6. (a)} \\ &= A^2 + \frac{\alpha}{\beta} AB + \frac{\beta}{\alpha} BA + B^2 \\ &= A^2 + B^2 && \text{car } AB = BA = 0_3 \\ &= A + B && \text{car } A^2 = A \text{ et } B^2 = B \\ &= I_3 \end{aligned}$$

On en déduit que M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{\alpha} A + \frac{1}{\beta} B$.

Ccl : M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

(b) Soient α et β deux réels non nuls.

Il suffit de calculer le produit $M^n \times (\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B)$:

$$\begin{aligned} M^n \times (\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B) &= (\alpha^n A + \beta^n B) \times (\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B) && \text{d'après la question 6. (c)} \\ &= A^2 + \alpha^n \beta^{-n} AB + \beta^n \alpha^{-n} BA + B^2 \\ &= A^2 + B^2 && \text{car } AB = BA = 0_3 \\ &= A + B \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Ccl : M^n est inversible et son inverse M^{-n} est donnée par $M^{-n} = (\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B)$.

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite $(X_n)_n$ de matrices colonnes définie par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y.$$

8. Par simple calcul matriciel $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

On voit bien que $I_3 - T = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$ avec $a = -2$ et $b = -1$ et donc d'après la question 6.(a) de la Partie

II on a $I_3 - T = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$ donc $\alpha = -1$ et $\beta = -4$.

Ccl: $I_3 - T = -A - \frac{1}{4}B$.

9. La question 7, montre que toute matrice du type $M = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ est inversible et permet de déterminer son inverse par la formule

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha} A + \frac{1}{\beta} B.$$

D'après la question précédente on a $I_3 - T = -A - 4B$.

Ccl: la matrice $(I_3 - T)$ est inversible et $(I_3 - T)^{-1} = -A + \frac{1}{4}B$.

10. Du fait de l'inversibilité de la matrice $I_3 - T$ l'équation $L = TL + Y$ se simplifie successivement en :

$$L = TL + Y \iff L - TL = Y \iff (I_3 - T)L = Y \iff L = (I_3 - T)^{-1}Y \iff L = \left(-A - \frac{1}{4}B\right)Y.$$

Il suffit alors de calculer le produit matriciel

$$\left(-A - \frac{1}{4}B\right)Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ccl: Il existe une unique matrice colonne $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $L = TL + Y$ c'est $L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que cette question implique l'égalité : $Y - L = -TL$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de X_{n+1} on a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= TX_n + Y - L \\ &= TX_n - TL \\ &= T(X_n - L). \end{aligned}$$

On montre par récurrence simple qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n - L = T^n(X_0 - L)$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a vu à la question 8. de cette partie que $I_3 - T = -A - 4B$ donc on a $T = I_3 + A + 4B$.

D'après la question précédente on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = (I_3 + A + 4B)^n(X_0 - L) + L$$

Or on sait que la matrice $A + 4B$ commute avec la matrice I_3 (qui commute avec n'importe quelle matrice).
Donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
 (I_3 + A + 4B)^n &= ([A + 4B] + I_3)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [A + 4B]^k I_3^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [A + 4B]^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [1^k \times A + 4^k \times B] && \text{d'après la question 6.(c) de la Partie II} \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) A + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k \right) B && \text{par linéarité} \\
 &= (1+1)^n A + (1+4)^n B && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
 &= 2^n A + 5^n B
 \end{aligned}$$

Ccl: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = (2^n A + 5^n B)(X_0 - L) + L.$