

DM4

À RENDRE LE MARDI 15 OCTOBRE

Exercice 1 : obligatoire

On considère une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).

Par exemple, si les tirages successifs ont donné une boule : "noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche" alors :

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne;
- l'urne contient maintenant 1 boule noire et 1 boule blanche ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche;
- X vaut donc 1 et Y vaut donc 4.

1. Déterminer la loi de X . *Indication : on pourra utiliser des évènements élémentaires.*

2. En déduire que X possède une espérance et une variance et les calculer.

3. Montrer que $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

4. Pour tout entier $i \geq 1$, déterminer les probabilités suivantes :

$$P((X = 0) \cap (Y = i)), P((X = 1) \cap (Y = i)), P((X = 2) \cap (Y = i)).$$

5. En déduire la loi de Y puis vérifier que $\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i) = 1$.

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7. Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 2 : khûbes ou facultatif

Partie I : une première expérience aléatoire

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée, donnant “pile” avec probabilité $\frac{1}{2}$ et “face” également avec probabilité $\frac{1}{2}$, les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun “pile” pendant les n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier “pile”.

- Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
- Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
- Vérifier que $\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.
- A quoi sert la commande `nr.binomial(1, 0.5)` ?

Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en argument d'entrée l'entier n , pour qu'elle simule l'expérience décrite ci-dessus (“pile” sera codé par le nombre 1 et “face” par 0).

```

1  def simule_Z(n):
2      k=0
3      Z=0
4      lancer =0
5      while lancer ==0 & ..... :
6          lancer = nr.binomial(1,0.5)
7          if lancer == 1:
8              Z = .....
9              .....
10         return Z
11

```

Partie II : une deuxième expérience aléatoire

On considère dans cette partie une deuxième expérience aléatoire à l'issue de l'expérience décrite dans la première partie.

On dispose de $n + 1$ urnes. U_0, \dots, U_n telles que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes, de la façon suivante :

- Si après les lancers de la pièce décrits dans la première partie, la variable Z prend la valeur $k \geq 1$, alors on tire un par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
- Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

- Déterminer $X(\Omega)$. Justifier votre réponse.
- Soit $i \in X(\Omega)$.
 - Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=0)}(X = i)$.
 - Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=n)}(X = i)$.
 - Pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X = i)$.
- Démontrer que : $P(X = 0) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k$.
 - Démontrer que : $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
 - Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, $P(X = i)$ sous forme d'une somme que ne cherchera pas à réduire.

4. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente que $\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$.
5. (a) Comment peut-on simuler le fait de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches et $n - k$ boules noires ?
- (b) En déduire une fonction qui simule la variable X . On devra faire appel à la fonction `simule_Z(n)` définie dans la Partie I.