DM4

À RENDRE LE MARDI 15 OCTOBRE

Exercice 1 : obligatoire

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on note B_i : "A obtient une boule blanche au i-ième tirage" et N_i : "A obtient une boule noire au i-ième tirage".

   Il n'y a que 2 boules noires et le joueur A laisse place au joueur B dès qu'il a tiré la première boule blanche.

   Le support de X est donc : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

   De plus, à l'aide de la formule des probabilités composées :

   • $P(X=0) = P(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

   • $P(X=1) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   • $P(X=2) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2 \cap B_3) \times P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{6}$.

2. D'après les précédents calculs on a : $E(X) = 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$.

   Déterminons $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 \times P(X=k)$ (formule de transfert) :

$$\begin{array}{rcl} E(X^2) & = & 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) \\ & = & 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} \\ & = & 1 \end{array}$$

   D'après la formule de Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

   De plus $E(X)^2 = \dfrac{4}{9}$.

   <u>Conclusion :</u> $V(X) = \dfrac{5}{9}$.

3. Lorsque B prend la main, la situation est déterminée par les résultats des tirages de A. De plus, l'événement $(Y=0)$ est réalisé lorsque B tire une boule blanche dès le 1er tirage.

   • si $(X=0)$ est réalisé l'urne contient maintenant 3 boules dont 1 blanche et 2 noires $\Rightarrow P_{(X=0)}(Y=0) = \dfrac{1}{3}$,

   • si $(X=1)$ est réalisé l'urne contient maintenant 2 boules dont 1 blanche et 1 noire $\Rightarrow P_{(X=1)}(Y=0) = \dfrac{1}{2}$,

   • si $(X=2)$ est réalisé l'urne contient maintenant seulement 1 boule blanche $\Rightarrow P_{(X=2)}(Y=0) = 1$.

   D'après la FPT avec le SCE $((X=0), (X=1), (X=2))$ on a :

$$\begin{array}{rcl} P(Y=0) & = & P_{(X=0)}(Y=0)P(X=0) + P_{(X=1)}(Y=0)P(X=1) + P_{(X=2)}(Y=0)P(X=2) \\ & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + 1 \times \dfrac{1}{6} \\ & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

4. Comme B effectue des tirages successifs avec remise $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Cependant le nombre de boules dans l'urne avant tirage par B est déterminé par les tirages de A, nous calculons donc les lois conditionnelles de Y sachant $(X = 0), (X = 1)$ et $(X = 2)$.

   Soit $i \geqslant 1$:

   - $P_{(X=0)}(Y = i) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^i \times \dfrac{1}{3}$ (1 blanche et 2 noires)
   - $P_{(X=1)}(Y = i) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^i \times \dfrac{1}{2}$ (1 blanche et 1 noire).
   - $P_{(X=2)}(Y = i) = 0$ (2 blanche et 0 noire).

   Par conséquent, pour tout $i \geqslant 1$:

   - $P((X = 0) \cap (Y = i)) = P_{(X=0)}(Y = i)P(X = 0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^i \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$.
   - $P((X = 1) \cap (Y = i)) = P_{(X=0)}(Y = i)P(X = 1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^i \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}$.
   - $P((X = 2) \cap (Y = i)) = P_{(X=0)}(Y = i)P(X = 2) = 0$.

5. D'après la FPT avec le SCE $((X = 0), (X = 1), (X = 2))$ on a, pour tout $i \geqslant 1$:

$$\begin{array}{rcl} P(Y=i) & = & P((X=0)\cap(Y=i)) + P((X=1)\cap(Y=i)) + P((X=2)\cap(Y=i)) \\ & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^i \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + 0 \\ & = & \dfrac{1}{6} \times \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right] \end{array}$$

   Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=i) & = & P(Y=0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y=i) & \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \times \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right] & \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \times \left[\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^i} + \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^i}\right] & \text{par linéarité} \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \times \left[\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right] & \text{on reconnait des séries géométriques} \\ & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times [2+1] & \\ & = & \frac{1}{2} + \frac{3}{6} & \\ & = & 1 & \end{array}$$

   Conclusion : On a bien $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i) = 1$.

6. On a vu que $P\big(X = 2) \cap (Y = 1)\big) = 0$ et par ailleurs $P(X = 2) = \frac{1}{6} \neq 0$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72} \neq 0$.

   Par conséquent $P\big(X = 2) \cap (Y = 1)\big) \neq P(X = 2)(Y = 1)$.

   Conclusion : Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

7. Espérance : Y admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} iP(Y = i)$ converge absolument.

   Ici tout les termes sont positifs donc il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} iP(Y = i)$ converge.

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 0} iP(Y=i) &= 0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\sum_{i\geqslant 1} i\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]\\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right]\end{aligned}$$

On reconnaît une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées premières de raisons $2/3, 1/2 \in]-1;1[$.

Donc par linéarité la série $\sum_{i\geqslant 0} iP(Y=i)$ converge et de plus :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} iP(Y=i) &= \frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right]\\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{(1-2/3)^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{(1-1/2)^2}\right]\\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times 4\right]\\ &= \frac{1}{6}\times 8.\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> La variable Y admet une espérance et $E(Y)=\frac{4}{3}$.

<u>Variance :</u> Montrons que Y admet un moment d'ordre 2 càd que Y^2 admet une espérance.
D'après le THM de transfert cela revient donc à étudier la nature de la série $\sum_{i\geqslant 0} i^2P(Y=i)$

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 0} i^2P(Y=i) &= \sum_{i\geqslant 0}[i(i-1)+i]\,P(Y=i)\\ &= \sum_{i\geqslant 0} i(i-1)P(Y=i)+\sum_{i\geqslant 0} iP(Y=i)\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme on reconnait la série définissant $E(Y)$ que l'on a étudié.
Etudions donc la nature de la série $\sum_{i\geqslant 0} i(i-1)P(Y=i)=\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)P(Y=i)$ (définissant l'espérance de la variable $Y(Y-1)$ d'après le THM de transfert).

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)P(Y=i) &= \frac{1}{6}\times\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]\\ &= \frac{1}{6}\times\left[\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)\left(\frac{2}{3}\right)^i+\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]\\ &= \frac{1}{6}\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{i-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}\right]\end{aligned}$$

On reconnaît une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées secondes de raisons $2/3, 1/2 \in]-1;1[$.
Donc par linéarité la série $\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)P(Y=i)$ converge (et donc la variable $Y(Y-1)$ admet une espérance).
De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)P(Y=i) &= \frac{1}{6}\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{i-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}\right]\\ &= \frac{1}{6}\times\left[\frac{4}{9}\times\frac{2}{(1-2/3)^3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{(1-1/2)^3}\right]\\ &= \frac{1}{6}\times\left[\frac{4}{9}\times 2\times 27+\frac{1}{4}\times 2\times 8\right]\\ &= \frac{1}{6}\times[24+4]\\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $Y(Y-1)$ admet une espérance et que $E\big(Y(Y-1)\big)=\frac{14}{3}$.
Remarquons que $Y^2=Y(Y-1)+Y$.
On vient de montrer que $Y(Y-1)$ admettait une espérance et on sait que Y admet aussi une espérance.

Donc par linéarité, Y^2 admet une espérance et de plus

$$E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y) = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = 6.$$

<u>CONCLUSION GENERALE :</u> Comme Y admet un moment d'ordre 2, d'après la formule de Koenig-Huygens, la variable Y admet une variance et de plus :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 6 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{38}{9}.$$

Exercice 2 : khûbes ou facultatif

Partie I : une première expérience aléatoire

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée, donnant “pile” avec probabilité $\frac{1}{2}$ et “face” également avec probabilité $\frac{1}{2}$, les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun “pile” pendant les n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier “pile”.

1. $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$. En effet, si l'on note P_k l'événement élémentaire “on obtient “pile” au k-ème lancer” et $F_k = \overline{P_k}$ alors on a :

$$(Z=0) = F_1 \cap \ldots \cap F_n \quad \text{et pour tout } k \in [\![1;n]\!] \quad (Z=k) = F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap P_k.$$

2. D'après ce qui précède et par indépendance des lancers on a :

$$P(Z=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{et pour tout } k \in [\![1;n]\!] \quad P(Z=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right).$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{P(Z=k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } k=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{si } k \in [\![1;n]\!] \end{cases}}$

3.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z=k) &= P(Z=0) + \sum_{k=1}^{n} P(Z=k) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{1}{2} \times \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. La commande `nr.binomial(1,0.5)` sert à simuler une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

```python
def simule_Z(n):
    k=0
    Z=0
    lancer=0
    while (lancer ==0) & (k+1 <= n):
        lancer = nr.binomial(1,0.5)
        if lancer == 1:
            Z=k
        Z=Z+1
        k=k+1
    return Z
```

Partie II : une deuxième expérience aléatoire

On considère dans cette partie une deuxième expérience aléatoire à l'issue de l'expérience décrite dans la première partie.
On dispose de $n+1$ urnes $U_0,\dots,U_n$ telles que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes, de la façon suivante :
• Si après les lancers de la pièce décrits dans la première partie, la variable Z prend la valeur $k \geqslant 1$, alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
• Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

1. $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$. En effet, $X=0$ est possible lorsque $Z=0$. Par ailleurs pour $k \in [\![1;n]\!]$ et si $(Z=k)$ est réalisé alors X peut prendre la valeur k puisqu'il est possible de tirer la boule numéro k dans l'urne U_k.

2. Soit $i \in X(\Omega)$.

   (a) Si l'événement $(Z=0)$ est réalisé alors X prend la valeur 0 et ne peut donc pas prendre une valeur $i \in [\![1;n]\!]$.
   Ccl : $P_{(Z=0)}(X=i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{si } i \in [\![1;n]\!] \end{cases}$.

   (b) Si l'événement $(Z=n)$ est réalisé alors on tire une par une et avec remise n une boules dans l'urne U_n qui est composée de n boules blanches. Par conséquent, on tire n boules blanches et X prend la valeur n. La probabilité $P_{(Z=n}(X=i)$ vaut donc 0 pour $i \in [\![0;n-1]\!]$ et $P_{(Z=n}(X=n)=1$.
   Ccl : $P_{(Z=n)}(X=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in [\![0;n-1]\!] \\ 1 & \text{si } i=n \end{cases}$.

   (c) Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Si $(Z=k)$ est réalisé alors on tire une par une avec remise k boules dans l'urne U_k qui est composée de k boules blanches et $n-k$ boules rouges.
   1er cas $k < i \leqslant n$: $P_{(Z=k)}(X=i)=0$ car on ne peut pas tirer plus de boules blanches ($=i$) que de tirages effectués ($=k$).
   2ème cas $0 \leqslant i \leqslant k$: La variable X revient donc à compter le nombre de succès (= tirer une boule blanche) au cours de k répétitions (= les k tirages dans l'urne U_k) d'épreuves de Bernoulli de paramètre $p=\frac{k}{n}$ (= probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne U_k). On reconnait donc une loi binomiale, ainsi :
   $$P_{(Z=k)}(X=i) = \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}$$
   Ccl : $\forall k \in [\![1;n-1]\!],\quad P_{(Z=k)}(X=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<i\leqslant n \\ \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \end{cases}$.

3. (a) D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\big((Z=k)\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \sum_{k=0}^{n} P_{(Z=k)}(X=0)P(Z=k) \\
&= \underbrace{P_{(Z=0)}(X=0)}_{=1}P(Z=0) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{(Z=k)}(X=0)P(Z=k) + \underbrace{P_{(Z=n)}(X=0)}_{=0}P(Z=n) \\
&= 1\times\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{k}{0}\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] + 0 \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k.
\end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> $\boxed{P(X=0) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k}$.

(b) De la même manière, d'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\big((Z=k)\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
P(X=n) &= \sum_{k=0}^{n} P_{(Z=k)}(X=n)P(Z=k)\\
&= \underbrace{P_{(Z=0)}(X=n)}_{=0}P(Z=0)+\sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{P_{(Z=k)}(X=0)}_{=0}P(Z=k)+\underbrace{P_{(Z=n)}(X=n)}_{=1}P(Z=n)\\
&= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Ccl : $\boxed{P(X=n)=\frac{1}{2^n}}$.

(c) Soit $i\in[\![1;n-1]\!]$. Toujours, d'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\big((Z=k)\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{k=0}^{n} P_{(Z=k)}(X=i)P(Z=k)\\
&= \sum_{k=0}^{i-1}\underbrace{P_{(Z=k)}(X=i)}_{=0}P(Z=k)+\sum_{k=i}^{n-1}P_{(Z=k)}(X=i)P(Z=k)+\underbrace{P_{(Z=n)}(X=i)}_{=0}P(Z=n)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}\frac{1}{2^k}\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{2n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}.
\end{aligned}$$

Ccl : $\boxed{\forall i\in[\![1;n-1]\!],\quad P(X=i)=\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{2n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}}$.

4.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} P(X=i) &= P(X=0) + \sum_{i=1}^{n-1} P(X=i) + P(X=n) \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} + \frac{1}{2^n} \\
&= 2 \times \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{0} \left(\frac{k}{2n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \qquad \text{par intervertion des sommes} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{2n} + \frac{n-k}{2n}\right)^k \qquad \text{Formule du binôme} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

5. (a) En utilisant `nr.binomial(1,k/n,1)` on peut simuler le fait de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires ; en codant une boule blanche par 1 et 0 pour une boule noire.

   (b) Fonction qui simule la variable X :

```python
def simule_X(n):
    Z = simule_Z(n)
    if Z == 0:
        X = 0
    else:
        X = nr.binomial(n,Z/n,1)
    return X[0]
```