DM5
À RENDRE LE MARDI 19 NOVEMBRE

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I (obligatoire) : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$pour tout $x \neq 0$.
   (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1-x)e^x - 1$ puis en déduire un équivalent simple de $f'(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$.
   (d) En déduire : $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
   (e) Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
   $$u(x) = (1-x)e^x - 1.$$
   (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.
   (c) A l'aide d'un équivalent simple, déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $+\infty$. Préciser l'équation de cette asymptote.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II (obligatoire) : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[,\ e^{2x} - 2x\,e^x - 1 \geqslant 0$
   (b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x\,e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
   (c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.
   (d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Écrire une fonction Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que$|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III (facultative) : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x\,f(x)$.
   En déduire la limite de G en $+\infty$.

   (b) Montrer : $\forall x \in\,]-\infty;0]\,,\ G(x) \leqslant x\,f(x)$.
   En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.