

DM5

CORRECTION

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Pour tout $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions continues.

En 0 : $e^x - 1 \sim x$ et donc pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \rightarrow 1 = f(0)$

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R}

- (b) Pour $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

- (c) On a le développement limité : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} (1-x)e^x - 1 &\underset{0}{=} (1-x)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) - 1 + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x - x^2 - 1 + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Donc $(1-x)e^x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$.

De plus par équivalent usuel $(e^x - 1)^2 \underset{0}{\sim} x^2$.

Don on a :

$$f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Conclusion : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$

- (d) Comme f est continue en 0 et que $f'(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$ alors f est C^1 en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. (a) $u(x) = (1-x)e^x - 1$
 u est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-x)e^x - e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

Donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $u'(x)$	$+$	0	$-$
variations de u			

Ccl: $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$.

(b) Comme on, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$ alors f est du signe de $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

Et pour $x = 0$: $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ alors

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

(c) En $-\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{-\infty}{\sim} -x \rightarrow +\infty$ car $e^x \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ par croissances comparées $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	
variations de f		

(d) Hors programme. Pour aller plus loin : déterminer un développement asymptotique de $f(x) - (1 - x)$ en $-\infty$.

(e) On attend le tracé de :

- l'asymptote en $-\infty$,
- l'asymptote horizontale ($y = 0$) en $+\infty$
- et la tangente de pente $-\frac{1}{2}$ en $(0, 1)$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 0 n'est pas point fixe puisque $f(0) \neq 0$

$$\text{Pour } x \neq 0: f(x) = x \iff \frac{x}{e^x - 1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$$

Conclusion: f admet un point fixe et un seul, $\alpha = \ln(2)$


2. (a) Soit $g(x) = e^{2x} - 2x e^x - 1$. g est dérivable sur \mathbb{R}^+ et


$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x(e^x - 1 - x). \end{aligned}$$

Soit $h(x) = e^x - 1 - x$. Alors h est dérivable sur \mathbb{R}^+ et

$$h'(x) = e^x - 1 \geq 0, \quad \forall x \geq 0$$

On a donc :

x	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$	+	
variations de h	0 	

x	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	
variations de g	0 	

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$

(b) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2x e^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

(c) Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x)$

Et pour $x = 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

Enfin on a vu que $f' < 0$ sur \mathbb{R} .

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

(d) On a donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

On montre alors, par récurrence, que pour tout $n : u_n \in \mathbb{R}^+$ (la récurrence est ici inutile car $f > 0$ sur \mathbb{R})
 $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \geq 1 : u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car $f > 0$ sur \mathbb{R} .

Donc, pour tout entier $n : u_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}^+ donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

3. On montre alors par récurrence :

Pour $n = 0 : |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2} |1 - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$

4. Et comme $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$ alors $\frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \rightarrow 0$ et comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$, par encadrement $|u_n - \alpha| \rightarrow 0$ et

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \ln(2)$

5. Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$, il faut calculer u_n (et n) jusqu'à ce que $|u_n - \ln(2)| < 10^{-9}$ (ce qui n'est pas le cas pour $n = 0$)

```

1 def seuil():
2     u=1
3     n=0
4     while np.abs(u-np.log(2)) < 10**(-9):
5         u=u/(np.exp(u)-1)
6         n=n+1
7     return n

```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Comme f est continue sur \mathbb{R} , elle y admet une primitive F qui est C^1 sur \mathbb{R} .

On a alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et donc G est C^1 sur \mathbb{R} comme composée de fonctions C^1 .

et on a :

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
 &= 2f(2x) - f(x) \\
 &= 2 \frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x-1} \text{ si } 2x \text{ et } x \neq 0 \\
 &= \frac{4x - x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} \\
 &= \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \\
 G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. (a) Soit $x \geq 0$. On a alors $x \leq 2x$ et pour tout $x \leq t \leq 2x$:

$$0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x) \text{ car } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x).$$

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq G(x) \leq x f(x)$.

Et comme $x f(x) = x^2 e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$, par croissances comparées.

On en déduit par encadrement :

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$

(b) Pour $x \leq 0$ on a $2x \leq x \leq 0$ et pour tout $2x \leq t \leq x$: $f(t) \geq f(x)$ car f est décroissante sur \mathbb{R} .

D'où par (dé)croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x)$$

car les bornes sont en ordre décroissant.

Conclusion : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $G(x) \leq x f(x)$.

Et comme $x f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \underset{+\infty}{\sim} -x^2 \rightarrow -\infty$.

On en déduit par comparaison de limites :

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$.

3. On rassemble tout :

x	$-\infty$	0	$\ln(3)$	$+\infty$
signe de $e^{2x} - 1$	-	0	+	+
signe de $3 - e^x$	+		0	-
signe de $G'(x)$	+		0	-
variations de G	$-\infty$	$G(\ln(3))$		0