# DM6

## À RENDRE LE MARDI 26 NOVEMBRE

### Exercice 1 : obligatoire

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) On donne la sortie Python suivante :

```
In [79]: np.dot(A-np.eye(3,3),A-np.eye(3,3))
Out[79]:
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])
```

   Interpréter en donnant une réponse faisant intervenir les matrices $A$ et $I$.

   (b) En déduire que $A$ est inversible et écrire $A^{-1}$ comme combinaison linéaire de $I$ et $A$.

2. On pose $A = N + I$.

   (a) Exprimer pour tout entier naturel $n$, la matrice $A^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et $N$, puis l'écrire comme combinaison linéaire de $I$ et $A$.

   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. On note $(E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on pose $U_1 = (A - I)E_1$ et $U_2 = E_1 + E_3$.

   (a) Montrer que si on pose $E_1(A) = Ker(A - I)$ alors $(U_1, U_2)$ est une base de $E_1(A)$.

   (b) Montrer que la famille $(U_1, U_2, E_1)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (c) On note $T$ la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées des vecteurs $AU_1$, $AU_2$ et $AE_1$ dans la base $(U_1, U_2, E_1)$.
   Expliciter $T$.

4. Soit $P$ la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P$ est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.

## Exercice 2 : khûbes

On désigne par $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de $A$ de degré 2 .
2. (a) En déduire la seule valeur propre de $A$ (donc aussi de $f$ ) .

   (b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
3. Déterminer une base $(u_1, u_2)$ du sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre de $f$ .
4. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$ . Montrer que la famille $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Vérifier que la matrice $T$ de $f$ dans la base $(u_1, u_2, u_3)$ est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

   (c) En écrivant $T = 2I + N$ , déterminer , pour tout entier naturel $n$ , la matrice $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et $N$ , puis de $I$ et $T$ .
5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

   (b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer $A^{-1}$ en fonction de $I$ et de $A$ .

   (c) Vérifier que la formule trouvée à la question $5a)$ reste valable pour $n = -1$.