DM6
CORRECTION

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) La sortie Python donne $(A-I)^2 = 0_3$.

   (b) On en déduit :

   $$(A-I)^2 = 0_3 \iff A^2 - 2I + I = 0_3 \iff A(A-2I) = -I \iff A(2I-A) = I.$$

   Ccl : La matrice A est inversible d'inverse $\boxed{A^{-1} = 2I - A}$.

2. On pose $A = N + I$.

   (a) Les matrices N et I commutent puisque toute matrice commute avec la matrice I.
   Par ailleurs remarquons que $N = A - I$ donc $N^2 = 0_3$ d'après la question 1.(a). Il s'ensuit que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_3$ puisque $N^k = N^{k-2}N^2 = 0_3$.
   D'après la formule du binôme matriciel on a donc :

   $$\begin{array}{rcl} A^n & = & (N+I)^n \\ & = & \sum_{k=0^n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k I^{n-k} \\ & = & \sum_{k=0^n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k \\ & = & \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \\ & = & I + nN \end{array}$$

   Or, comme $A = N + I$ on a aussi $N = A - I$ et donc

   $$A^n = I + n(A-I) \iff \boxed{A^n = nA - (n-1)I}.$$

   (b) Pour $n = -1$ la formule donne $A^{-1} = 2I - A$ ce qui est la formule trouvée à la question 1.(b).
   Ccl : La formule est valide pour $n = -1$.

3. On note (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on pose $U_1 = (A-I)E_1$ et $U_2 = E_1 + E_3$.

   (a) Déterminons une base de $E_1(A) = Ker(A-I)$:

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
X \in Ker(A-I) &\iff (A-I)X = 0\\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} -x+y+z &= 0\\ -2x+2y+2z &= 0\\ x-y-z &= 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -x+y+z &= 0 \end{cases} \quad \text{les trois lignes sont proportionnelles}\\
&\iff \begin{cases} x &= y+z \end{cases}\\
&\iff X = \begin{pmatrix} y+z\\ y\\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On en déduit alors que :

$$
\begin{aligned}
E_1(A) &= Ker(A-I)\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y+z\\ y\\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}\\
&= \left\{ y\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}\\
&= \left\{ y(E_1+E_2) + z(E_1+E_3) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}\\
&= Vect(E_1+E_2, E_1+E_3)\\
&= Vect(E_1+E_2, U_2)
\end{aligned}
$$

Ainsi la famille (E_1+E_2, U_2) est génératrice de $E_1(A)$. De plus, il est clair que les vecteurs E_1+E_2 et U_2 sont non colinéaires, donc la famille est libre.

Ccl : la famille (E_1+E_2, U_2) est une base de $E_1(A)$ et donc $dim(E_1(A) = 2$.

Remarquons que $(A-I)E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}$

Montrons maintenant que (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$:

Vu que $E_1(A)$ est un espace de dimension deux, pour montrer que (U_1, U_2) en est une base, on va montrer que U_1 et U_2 sont deux vecteurs non colinéaires de $E_1(A)$.

Il est clair que ces vecteurs sont non colinéaires et on a vu que U_2 appartient à $E_1(A)$.

Reste à montrer que $U_1 \in E_1(A)$. On a déjà vu que $U_2 \in E_1(A)$.

Or $U_1 = (A-I)E_1$ donc $(A_I)U_1 = (A-I)^2E_1$ et comme $(A-I)^2 = 0_3$ on en déduit que $(A-I)U_1 = 0_{3,1}$ et donc que $U_1 \in Ker(A-I)$.

Ccl: (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$.

(b) Remarquons que $U_1 = (A-I)E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $U_1 = \begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}$

Par ailleurs $U_2 = E_1 + E_3$ donc $U_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$.

La famille $\left(U_1, U_2, E_1\right)$ est constituée de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui un espace de dimension trois.

Il suffit de montrer que cette famille est libre.

Supposons que pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, on ait $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 E_1 = 0_{3,1}$.

Alors on obtient le système linéaire suivant :

$$
\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\ -2\lambda_1 &= 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
$$

D'où la liberté de la famille.

Ccl : La famille (U_1, U_2, E_1) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) Calculons :

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AU_1 = U_1$$

$$AU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AU_2 = U_2$$

$$AE_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AU_2 = U_1 + E_1$$

Ainsi les coordonnées de ces vecteurs dans la base (U_1, U_2, E_1) sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } AU_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } AU_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } AE_1$$

Ainsi la matrice T est donnée par

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que P est inversible en résolvant l'équation matricielle $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$PX = Y \iff \begin{cases} -x + y + z &= a \\ -2x &= b \\ x + y &= c \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z &= a \\ x &= -\frac{b}{2} \\ y &= c + \frac{b}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\frac{b}{2} \\ y &= c + \frac{b}{2} \\ z &= a - b - c \end{cases}$$

On trouve un unique solution $X = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} + c \\ a - b - c \end{pmatrix}$.

Ceci prouve que P est inversible et donc que $X = P^{-1}Y$.

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} + c \\ a - b - c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la vérification $A = PTP^{-1}$.