DM7
À RENDRE LE JEUDI 12 DÉCEMBRE

Exercice 1

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   (b) Montrer que $Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = Vect(u, v)$ où u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.
2. Soit $w = (1,1,1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. Justifier l'existence d'une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
   Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.
   (b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :
   $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x).$$
   En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
   Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
   (c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut : $M_n = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.
   (d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$: $g_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$
   (a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et positive.
   (d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
   (e) En déduire l'expression du I_n en fonction de n.