DM8
À RENDRE LE JEUDI 19 DÉCEMBRE

EXERCICE 1 :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}, \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}$$

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. (a) Démontrer : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\longrightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.

   (b) Démontrer : $\forall y \in]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t) = -1 + y - y\ln(y)$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)$ converge et déterminer sa valeur.

   (c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty}\left(t^{\frac{3}{2}}\,\frac{\ln(t)}{1+t^n}\right)$.

   (b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

EXERCICE 2 : Loi de Pareto

Partie 1 (obligatoire) : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.

   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

Partie 2 (facultative / khûbes) : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty;1[$, strictement positive et continue sur $[1;+\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

5. (a) Établir l'égalité :
$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$
   (b) Justifier que G est de la classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et en déduire que :
$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$
   (c) Montrer enfin la relation :
$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ qui, à tout réel t de $]1;+\infty[$, associe $y(t)$.
On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 1$.
Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.
   (b) En notant K la constante évoquée à la question 6.(a), donner toutes les solutions de (E_1).
   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).
   (d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \iff h - u$ est solution de (E_1).
   (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :
$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. (a) Montrer finalement que l'on a :
$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$
   (b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1;+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 (obligatoire) : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (c) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.

EXERCICE 3 : Loi de Grumbel

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Grumbel.

1. (a) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.
   (b) En déduire que W est une variable à densité puis déterminer une densité pour W.

On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathscr{E}(1)$.

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. On rappelle que `nr.exponential(1,n)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
   Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```
def simuleY(n):
  x=nr.exponential(1,n)
  y= ........
  return y
```

3. (a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   (b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

4. (a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt$ est convergente.
   (b) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\, dt = x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, dt$$

   (c) A l'aide de la question 3.(a), montrer que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) = 0$.
   (d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt$$

5. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\, du$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$ puis donner $E(Y_n)$ sous forme de somme.