DM8
CORRECTION

EXERCICE 1

1. (a) Étant clair que $1+t^n \longrightarrow 1$, $t \longrightarrow 0$, on a $1+t^n \sim 1$, $t \longrightarrow 0$, et par quotient d'équivalents, on obtient bien

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\longrightarrow 0}{\sim} \ln(t).$$

(b) Soit $y \in]0;1]$. L'intégrale demandée, classique, se calcule par IPP. En posant,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & \ln(t) \\ v'(t) & = & 1 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & 1/t \\ v(t) & = & t \end{array}\right. ,$$

on définit deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[y;1]$ rendant licite la formule d'intégration par parties qui donne

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_y^1 \ln(t)\mathrm{d}t & = & [t\ln(t)]_y^1 - \displaystyle\int_y^1 \mathrm{d}t \\ & = & -y\ln(y) - [t]_y^1 \\ & = & -y\ln(y) - 1 + y, \end{array}$$

ce qu'on voulait.

Par croissance comparée, $y\ln(y) \longrightarrow 0$, $y \longrightarrow 0$, ce qui permet de conclure à la convergence de l'intégrale considérée et d'écrire

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1.$$

(c) On a écrit précédemment que $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\longrightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ et que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ était convergente.

Attention, le critère de convergence par équivalence s'applique normalement à des fonctions positives, mais quitte à multiplier par -1, on peut l'appliquer à des fonctions négatives, il est simplement important que les fonctions considérées soient de signe constant.

On peut donc affirmer, par critère d'équivalence, que J_n converge.

2. (a) On voit que

$$t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\longrightarrow +\infty}{\sim} t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}}.$$

Or, comme $n \geqslant 2$, $n-\frac{3}{2} > 0$ et un argument de croissante comparée donne

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{1+t^n} = 0.$$

(b) On a également choisi $\frac{3}{2} > 1$ de sorte à pouvoir appliquer un critère convergence.

En effet, la limite précédente permet d'écrire que :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Et l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t$$

est convergente. Ainsi, comme $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $[1;+\infty[$, par critère de négligeabilité (ici tout est positif), on peut conclure à la convergence de l'intégrale K_n.

3. L'intégrale définissant I_n peut s'écrire, par Chasles, comme somme de deux intégrales (à savoir J_n et K_n) convergentes; elle est donc également convergente.

EXERCICE 2 : Loi de Pareto

1. On vérifie les différents points :

   - La fonction f est continue sur $]-\infty;1[$ car elle est constante sur cette intervalle, et elle continue sur $]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

   - La fonction f est positive ou nulle sur $]-\infty;1[$ (car nulle). De plus, comme $c>0$, on a également $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$. Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

   - Reste à vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = 1$ (puisque f est nulle sur $]-\infty;1[$). Or, pour tout $A \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^A f(x)dx &= \int_1^A \frac{c}{x^{1+c}}dx \\
&= \left[\frac{-1}{x^c}\right]_1^A \\
&= \frac{-1}{A^c}+1 \\
&= \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{car } c>0.
\end{aligned}$$

   Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut 1, et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ aussi.

   $\boxed{\text{Conclusion : la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

2. Comme X admet f pour d.d.p., pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt$.

   <u>- 1er cas :</u> si $x<1$:

   On a $F(x)=0$ (car f est nulle sur $]-\infty;x]$).

   <u>- 2ème cas :</u> si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\
&= \int_1^x f(t)dt \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty;1[\\
&= \int_1^x \frac{c}{t^{1+c}}dt \\
&= \left[\frac{-1}{t^c}\right]_1^x \\
&= \frac{-1}{x^c}+1
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction de répartition F de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^c} + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

3. (a) On calcule avec la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \frac{P\Big((X > t) \cap (X \leqslant tx)\Big)}{P(X > t)}$$

<u>- 1er cas :</u> si $x < 1$, alors $tx < t$.

Ainsi, $P\Big((X > t) \cap (X \leqslant tx)\Big) = 0$ (on ne peut pas avoir à la fois $X > t$ et $X \leqslant tx$), donc $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = 0$.

<u>- 2ème cas :</u> si $x \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X \leqslant tx) &= \frac{P(t < X < tx)}{P(X > t)} \\ &= \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{(tx)^c}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)} \quad \text{car } tx \geqslant t > 1 \\ &= \frac{-\frac{1}{t^c x^c} + \frac{1}{t^c}}{\frac{1}{t^c}} \\ &= -\frac{1}{x^c} + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^c} + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = F(x)$ pour tout x réel.

(b) Posons $X_t = \dfrac{X}{t}$. On cherche sa loi (sa fonction de répartition) conditionnellement à l'événement $(X > t)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X_t \leqslant x) &= P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leqslant x\right) \\ &= P_{(X>t)}(X \leqslant tx) \quad \text{car } t > 0 \\ &= F(x) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= P(X \leqslant x) \end{aligned}$$

Conclusion : la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

4. On a $G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)dt$. Or, la fonction g est nulle sur $]-\infty;1[$, d'où $\boxed{G(1) = \int_{-\infty}^{1} 0dt = 0}$.

5. (a) C'est le même genre de calcul qu'à la question 3.(a). Pour tout $x \geqslant 1$ et pour tout $t > 1$,

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leqslant x) \\ &= P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leqslant x\right) \quad \text{par hypothèse sur } Y \\ &= P_{(Y>t)}(Y \leqslant tx) \quad \text{car } t > 0 \\ &= \frac{P\Big((Y > t) \cap (Y \leqslant tx)\Big)}{P(Y > t)} \quad (P(Y > t) \neq 0 \text{ par hypothèse}) \\ &= \frac{P(Y \in]t;tx])}{P(Y > t)} \end{aligned}$$

Ce qui donne bien (comme $tx \geqslant t$) : $\boxed{G(x) = \dfrac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}}$.

(b) La variable aléatoire Y a pour fonction de répartition G, et pour densité g, qui est continue sur $]1;+\infty[$ par hypothèse.
Par conséquent, $\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]1;+\infty[}$ (et $G'(x) = g(x)$ pour tout $x > 1$).
Maintenant, soit $t > 1$ fixé. La fonction $x \mapsto G(tx)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (pour tout $x > 1$, on a $tx \in]1;+\infty[$). On peut donc dériver membre à membre l'égalité de la question précédente (par rapport à x) sur $]1;+\infty[$. On obtient, pour tout $x > 1$: $\boxed{G'(x) = \dfrac{tG'(tx)}{1 - G(t)}}$.

(c) D'après la question précédente, pour tout $t > 1$ et pour tout $x > 1$, on a :

$$G'(x)(1 - G(t)) = tG'(tx)$$

soit

$$g(x)(1 - G(t)) = tG'(tx)$$

On passe à la limite dans cette inégalité lorsque x tend vers 1. Par continuité (à droite) de g en 1, et par continuité de G' en t, on obtient :

$$g(1)(1 - G(t)) = tG'(t)$$

Or, $g(1) = c$ par hypothèse. Donc, pour tout $t > 1$, on a :

$$c(1 - G(t)) = tG'(t)$$

c'est-à-dire :

$$1 - G(t) = \frac{t}{c}G'(t)$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1}$$

6. (a) Pour tout $t > 1$, on a

$$z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = ct^{c-1}\left(y(t) + \frac{t}{c}y'(t)\right)$$

Comme $ct^{c-1} > 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall t > 1,\ z'(t) = 0 &\Longleftrightarrow \forall t > 1,\ y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0 \\ &\Longleftrightarrow y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) \end{aligned}$$

Autrement dit, y est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si z est constante sur $]1;+\infty[$.

(b) Pour tout $t>1$, on a $y(t)=\dfrac{z(t)}{t^c}$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions y de la forme $y: t\mapsto \dfrac{K}{t^c}$, avec K constante réelle.

(c) Soit u constante sur $]1;+\infty[$. Alors $u'=0$. Par conséquent, pour tout $t>1$, $u(t)+\dfrac{t}{c}u'(t)=u(t)$. Ainsi, u est solution de (E_2) si et seulement si $\boxed{u(t)=1 \text{ pour tout } t>1}$.

(d) On montre l'équivalence :

$$\begin{aligned}
h-u \text{ est solution de } (E_1) &\Longleftrightarrow \forall t>1,\ \Big(h(t)-u(t)\Big)+\frac{t}{c}\Big(h'(t)-u'(t)\Big)=0\\
&\Longleftrightarrow \forall t>1,\ h(t)-u(t)+\frac{t}{c}h'(t)-\frac{t}{c}u'(t)=0\\
&\Longleftrightarrow \forall t>1,\ h(t)+\frac{t}{c}h'(t)=u(t)+\frac{t}{c}u'(t)\\
&\Longleftrightarrow \forall t>1,\ h(t)+\frac{t}{c}h'(t)=1 \quad \text{car } u \text{ est solution de } (E_2)
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{h-u \text{ est solution de } (E_1) \Longleftrightarrow h \text{ est solution de } (E_2)}$$

(e) D'après ce qui précède, h est solution de (E_2) si et seulement si $h=u+y$ où y est solution de (E_1). Donc, d'après les questions 6.(b) et 6.(c) :
la fonction h est solution de (E_2) si et seulement s'il existe une constante $K\in\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t>1$, $h(t)=1+\dfrac{K}{t^c}$.

7. (a) D'après la question 5.(c), la fonction G est solution de (E_2), donc, d'après ce qui précède, il existe une constante $K\in\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t>1$, $G(t)=1+\dfrac{K}{t^c}$. Or, G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, en 1 (à droite), on a $\lim\limits_{t\to 1^+} G(t)=G(1)$, ce qui donne $1+K=0$ (cf question 4), donc $K=-1$.

$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } t>1, \text{ on a } G(t)=1-\dfrac{1}{t^c}.}$

(b) Pour $t=1$, on a $G(t)=G(1)=0$ (question 4) et $1-\dfrac{1}{t^c}=1-\dfrac{1}{1^c}=1-1=0$. L'égalité ci-dessus est donc encore vraie pour $t=1$.
$\boxed{\text{Conclusion : la relation de la question précédente s'étend à } [1;+\infty[.}$

Ensuite, comme g est une densité de Y et G est la fonction de répartition de Y, on a, pour tout $t<1$, $G(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$, c'est-à-dire $G(t)=0$, car g est nulle sur $]-\infty;1[$ par hypothèse.
Par conséquent, la fonction de répartition G de Y est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{t^c} & \text{si } t\geqslant 1\\ 0 & \text{si } t<1\end{cases}$$

On reconnaît alors la la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètre c (cf question 2).
$\boxed{\text{Conclusion : } Y \text{ suit la loi de Pareto de paramètre } c.}$

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leqslant x) \\ &= P(\ln(X) \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant e^x) \quad \text{par stricte croissance de l'exponentielle} \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{H(x) = F(e^x) \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

(b) On poursuit le calcul ci-dessus. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= F(e^x) \\ &= \begin{cases} \dfrac{-1}{e^{cx}} + 1 & \text{si } e^x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } e^x < 1 \end{cases} \quad \text{d'après la question 2} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'expression de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre c.

Conclusion : la variable aléatoire Z suit la loi exponentielle de paramètre c.

(c) Il suffit de simuler Z (à l'aide la fonction `exponential` de la bibliothèque `numpy.random`) et d'en déduire X en calculant e^Z :

```
def SimulX(c):
        Z=rd.exponential(1/c)
        return np.exp(Z)
```

EXERCICE 3 : Loi de Grumbel

1. (a) $V(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$ donc $W(\Omega) = \mathbb{R}$ car $W = -\ln(V)$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_W(x) = P(W \leq x) = P(-\ln(V) \leq x) = P(\ln(V) \geq -x) = P(V \geq e^{-x}) = 1 - P(V \leq e^{-x})$
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_W(x) = 1 - F_V(e^{-x})$
Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $F_V(e^{-x}) = 1 - e^{-e^{-x}}$
On a donc bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$.

(b) W est une variable à densité si et seulement si F_W est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$.
Or $x \mapsto e^{-x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $F_W : x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{W \text{ est donc bien une variable à densité.}}$

De plus on obtient une densité f_W de W en dérivant sa fonction de répartition.

Ainsi nous obtenons $\boxed{f_W : t \mapsto e^{-t} e^{-e^{-t}}}$.

2.

```
def simuleY(n):
  x=nr.exponential(1,n)
  y= np.max(x)
  return y
```

3. (a) $X_i(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$ donc $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) \\
&= P((X_1 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)) \\
&= P(X_1 \leq x) \times \ldots \times P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i \\
&= (P(X_1 \leq x))^n \qquad \text{car tous les } X_i \text{ suivant la même loi} \\
&= \left(F_{X_1}(x)\right)^n
\end{aligned}$$

Or les variables suivent la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$, donc on a bien : $\boxed{F_{Y_n}(x)\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$.

(b) Commençons par justifier que Y_n est une variable à densité.

- F_{Y_n} est $\mathscr{C}^\infty$ (donc $\mathscr{C}^1$ et continue) sauf éventuellement en 0 par théorèmes généraux.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} F_{Y_n}(x)=0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F_{Y_n}(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(1-e^{-x})^n=0$

Ainsi, F_{Y_n} est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
On obtient une densité en dérivant F_{Y_n} partout où elle est $\mathscr{C}^1$.
$\forall t\in\mathbb{R}^- \qquad f_{Y_n}(t)=0$
$\forall t\in\mathbb{R}^{+*} \qquad f_{Y_n}(t)=n\times(-(-e^{-t})(1-e^{-t})^{n-1}$

On peut compléter comme on veut en 0 $\boxed{f_{Y_n}(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} & \text{si } t\geq 0 \end{cases}}$.

4. (a) Lorsque t est au voisinage de $+\infty$, e^{-t} est au voisinage de 0. On connait le DL_1 de $(1+u)^\alpha$ quand u est voisin de 0 :
$(1+u)^\alpha=1+\alpha u+o(u)$ donc, $1-(1+u)^\alpha\sim-\alpha u$.
En posant $u=-e^{-t}$, on a donc $1-(1-e^{-t})^n\sim ne^{-t}$ quand t voisin de $+\infty$.
$\boxed{1-F_{Y_n}(t)\sim ne^{-t} \qquad \text{quand } t \text{ voisin de } +\infty}$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (et vaut 1, en rapport avec la loi exponentielle de paramètre 1) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} ne^{-t}\,dt$ converge. Par la règle de l'équivalent pour les intégrales des fonctions positives, on peut donc affirmer que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-F_{Y_n}(t))\,dt \text{ converge}}$.

(b) Soit x un réel strictement positif. Posons $J(x)=\displaystyle\int_0^x(1-F_{Y_n}(t))\,dt$.
On va procéder par intégration par parties en prenant $u(t)=1-F_{Y_n}(t)$ et $v'(t)=1$
On a donc $u'(t)=-F'_{Y_n}(t)=-f_{Y_n}(t)$ et on choisit, parmi les primitives, $v(t)=t$
u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ (car f_{Y_n} est bien continue en 0). On peut donc intégrer par parties.
$J(x)=\left[t(1-F_{Y_n}(t)\right]_0^x-\displaystyle\int_0^x\left(t\times(-f_{Y_n}(t)\right)\,dt=x\left(1-F_{Y_n}(x)\right)+\int_0^x tf_{Y_n}(t)\,dt.$
C'est la relation attendue.

(c) On utilise l'équivalent précédent et donc , $x\left(1-F_{Y_n}(x)\right)\sim nxe^{-x}$, au voisinage de $+\infty$.
Or $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} nxe^{-x}=0$ par croissances comparées. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\left(1-F_{Y_n}(x)\right)=0}$.

(d) De la relation du b, on tire : $\displaystyle\int_0^x tf_{Y_n}(t)\,dt=J(x)-x(1-F_{Y_n}(x))$
On sait que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} J(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-F_{Y_n}(t))\,dt$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x(1-F_Y{}_n(x))=0$
Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\displaystyle\int_0^x tf_{Y_n}(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\left(1-F_{Y_n}(t)\right)\,dt$
On a bien : Y_n possède une espérance et $\boxed{E(Y_n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-F_{Y_n}(t)\right)\,dt}$.

5. (a) On reprend donc $J(x)=\displaystyle\int_0^x(1-F_{Y_n}(t))\,dt$. On utilise le changement de variable $u=1-e^{-t}$.
- quand $t=0$, $u=0$

• quand $t = x$, $u = 1 - e^{-x}$

• $e^{-t} = 1 - u$ donc $-t = \ln(1-u)$ ou encore $t = -\ln(1-u)$ donc $\quad dt = \dfrac{1}{1-u}\,du$

Portons cela dans l'intégrale $J(x)$:

$J(x) = \displaystyle\int_{u=0}^{u=1-e^{-x}} (1-u)^n \times \frac{1}{1-u}\,du.$

On a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\,dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,du}$.

(b) On sait que, si $u \neq 1$, $\dfrac{1-u^n}{1-u} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^i$

Or, si $u \in [0, 1-e^{-x}]$, $u \in [0,1[$ donc $u \neq 1$. Ainsi par croissance de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,du = \int_0^{1-e^{-x}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} u^i\right)\,du$

On utilise maintenant la linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,du = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^{1-e^{-x}} u^i\,du\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{u^{i+1}}{i+1}\right]_0^{1-e^{-x}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1-e^{-x})^{i+1}}{i+1}$

Il ne reste qu'à utiliser le changement d'indice $k = i+1$ et nous obtenons bien :

$\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k}.$

$E(Y_n) = \displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} J(x)$. Or $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} (1-e^{-x})^k = 1.$

On peut donc conclure $\quad \boxed{E(Y_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$