

DM9 DE NOËL

À RENDRE LE MARDI 7 JANVIER

EXERCICE

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \quad \text{et on note : } \mathcal{E} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Partie I : Étude de l'espace \mathcal{E}

1. Montrer que la matrice 0_4 appartient à \mathcal{E} .
2. (a) Déterminer le rang de $M(a, 0)$ avec $a \neq 0$.
(b) Déterminer le rang de $M(0, b)$ avec $b \neq 0$.
3. Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de \mathcal{E} et sa dimension.
4. Le produit de deux matrices quelconques de \mathcal{E} appartient-il encore à \mathcal{E} ?

Partie II : Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est $M(a, b)$.

On pose :

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 0, 1), \quad v_3 = (-1, 0, 0, 1), \quad v_4 = (0, -1, 1, 0) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

5. Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et que (v_3, v_4) est une base de $\text{Ker}(f)$.
6. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 . On notera P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^4 à la base \mathcal{B}' .
7. Déterminer P^{-1} .
8. Justifier que la matrice de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}' est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie III : Valeurs propres d'une matrice

On dit qu'un réel λ est une valeur propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

9. **Question préliminaire** : Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.

Dans toute la suite de l'exercice on supposera λ est un réel tel que $\lambda \neq 0$.

10. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Montrer : $NX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{cases}$

11. En déduire que λ est une valeur propre de N si et seulement si λ est une valeur propre de T .

On rappelle également qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

12. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.

Montrer que les valeurs propres de N sont $\{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.

13. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.

Montrer que N n'admet aucune valeur propre réelle.

PROBLÈME

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

- Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.
- Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.
 - En déduire les variations de φ sur $] -\infty, 1]$.
 - La fonction φ est-elle dérivable en 1 ? *Indication : étudier la limite du taux d'accroissement.*
- Montrer soigneusement que $\varphi(x) \underset{-\infty}{\sim} -x \ln(1-x)$ puis en déduire la limite de φ en $-\infty$.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^1 t \ln(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

(b) En déduire : $\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. (a) Vérifier, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.
- (b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* : $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}$.
7. Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.
- En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
8. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
9. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.
10. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé. On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. (a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n(n-1)}$.
- (b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?
12. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```

1 def simuleN():
2     b=1 #b designe le nbre de boules bleues dans l'urne
3     while rd.random() < ..... :
4         b=b+1
5     return b

```

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de \mathbb{N}^* , les variables aléatoires X_1, \dots, X_n et N sont mutuellement indépendantes.

On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à \mathbb{N}^* .

Enfin, on définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.

Par exemple si $N = 3$ alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ mais si $N = 5$ alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

13. (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}_{(N=n)}(T \leq x) = (F(x))^n$.
- (b) En déduire d'après la formule des probabilités totales et d'un résultat de la partie 2 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x)).$$
14. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- (a) On rappelle que l'instruction `nr.random(n)` renvoie un vecteur ligne contenant n réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Écrire une fonction Python d'en-tête `def simuleT()` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T .

- (b) On suppose la fonction précédente correctement écrite et on considère la fonction Python suivante :

```

1 def mystere():
2     m=[]
3     for k in range(3):
4         s=np.zeros((1,1000))
5         for j in range(1000):
6             s[j]=simuleT()
7         m.append(np.mean(s))
8     return m

```

À son appel, on obtient :

0.7474646 0.7577248 0.7470916

Que renvoie la fonction `mystere` ? Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire T ?

- (c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

- (d) En déduire que T est une variable aléatoire à densité.
- (e) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que T admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T)$.

15. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
- (b) Déduire de la question 13.(b) une expression de la fonction de répartition de T .
- (c) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction :

$$g: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- (d) Justifier que T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(T) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)$.
 En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.