

DM9 DE NOËL CORRECTION

EXERCICE

Partie I : Étude de l'espace \mathcal{E}

- $0_4 = M(0,0)$ donc 0_4 appartient à \mathcal{E} .
- (a) Soit $a \neq 0$.

$$\text{rg}(M(a,0)) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \\ a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

- (b) Soit $b \neq 0$.

$$\text{rg}(M(0,b)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix} = \text{rg}(b \ b \ b \ b) = 1$$

- Sans aucune difficulté on a :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(M(1,0), M(0,1))$$

Or les matrices $M(1,0)$ et $M(0,1)$ sont clairement non colinéaires.

Ccl : \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

- On remarque que :

$$M(1,0) \times M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le produit $M(1,0) \times M(0,1)$ n'appartient pas à \mathcal{E} .

Ccl : L'espace \mathcal{E} n'est pas stable par produit.

Partie II : Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$

5. Déterminons $\text{Ker}(M(a, b))$:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(M(a, b)) &= \left\{ U \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid M(a, b)U = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} ax + at = 0 \\ bx + by + bz + bt = 0 \end{cases} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{car } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -z \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\text{Ker}(M(a, b)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Or $M(a, b)$ est la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique donc on a :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)).$$

Or v_3 et v_4 sont clairement non colinéaires, donc (v_3, v_4) est une base de $\text{Ker}(f)$.

Ccl : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_3, v_4)$ est bien un sous-espace vectoriel de dimension 2 de \mathbb{R}^4 .

6. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Montrons que P est inversible :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(P) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

La matrice P est donc inversible.

Ccl: $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

7. Déterminons P^{-1} .

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 PX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x - t = b \\ x + t = c \\ y + z = d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x - t = b \\ 2x = b + c \\ y + z = d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - a \\ x - t = b \\ x = \frac{b}{2}c \\ z = d - y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -a + \frac{b}{2}c \\ x - t = b \\ x = \frac{b}{2}c \\ z = a - \frac{b}{2}c + d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = P^{-1}Y
 \end{aligned}$$

avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

8. D'après la formule du changement de base on a :

$$N = P^{-1}M(a, b)P$$

D'où par produits matriciels :

$$\begin{aligned}
 N &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

9. (a) Remarquons que la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible si et seulement l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$ admet comme unique solution $X = 0$.

En prenant les négations des deux proposition de cette équivalence on retrouve bien ce qu'il est demandé.

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 NX = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} ax + ay \\ 3bx + y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda t \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} ax + ay \\ 3bx + by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \text{et } z = t = 0 \quad (\text{car } \lambda \neq 0) \\
 &\iff \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \text{et } z = t = 0 \\
 &\iff T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et } z = t = 0.
 \end{aligned}$$

- (c) D'après la question 9.(a) λ est une valeur propre de N si et seulement s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $NX = \lambda X$.

Or d'après la question précédente une telle matrice colonne X non nulle existe si et seulement si $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $z = t = 0$.

Or comme X est supposée non nulle, il s'ensuit que la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ n'est pas nulle.

La relation $TU = \lambda U$ équivaut alors (toujours d'après la question 9.(a)) à ce que λ soit une valeur propre de T .

Ccl : On a donc bien montré l'équivalence : λ est une valeur propre de N si et seulement si λ est une valeur propre de T .

- (d) On suppose $(a, b) = (1, 1)$.

D'après la question précédente il suffit de déterminer les valeurs propres de T .

Or d'après la définition :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre de } T &\iff T - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\
&\iff (1-\lambda)^2 - 3 = 0 \quad (\text{en utilisant le rappel sur l'inversibilité des matrices } 2 \times 2) \\
&\iff 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0 \\
&\iff \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \\
&\iff \lambda \in \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\} \quad (\Delta = 12)
\end{aligned}$$

Ccl : les valeurs propre de T et donc de N sont $\{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.

(e) On suppose $(a, b) = (1, -1)$.

En raisonnant de la même manière :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre de } T &\iff T - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\
&\iff (1-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0 \quad \text{en utilisant le rappel} \\
&\iff 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0 \\
&\iff \lambda^2 + 2 = 0 \\
&\iff \lambda^2 = -2 \quad \text{ABSURDE !}
\end{aligned}$$

Ccl : T et donc N n'admet pas de valeurs propres réelles.

PROBLÈME

Partie A : Étude de la fonction φ

1. La fonction φ est continue sur $]-\infty, 1[$ par théorèmes généraux.

Montrons que φ est continue en 1 :

$$\text{On a } \varphi(1) = 1 \text{ et de plus } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0 \end{cases} \text{ par croissances comparées } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 0 \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)}.$$

Ccl : φ est continue sur $]-\infty, 1[$ et en 1 donc elle est continue sur $]-\infty, 1]$.

2. (a) La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\infty, 1[$ par théorèmes généraux.

De plus, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\varphi'(x) = 1 - \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} \Rightarrow \boxed{\varphi'(x) = -\ln(1-x)}.$$

(b) $\varphi'(x) \geq 0 \iff \ln(1-x) \leq 0 \iff 1-x \leq 1 \iff x \geq 0$.

Ccl : La fonction φ est :

- strictement croissante sur $[0, 1]$
- $\varphi(0) = 0$;
- strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$

(c) Etudions la limite du taux d'accroissement :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \frac{x - 1 + (1-x) \ln(1-x)}{x - 1} = 1 - \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty \quad \text{car } \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$$

Ccl : φ n'est pas dérivable en 1. Sa courbe admet tout de même une demi-tangente verticale en 1.

3.

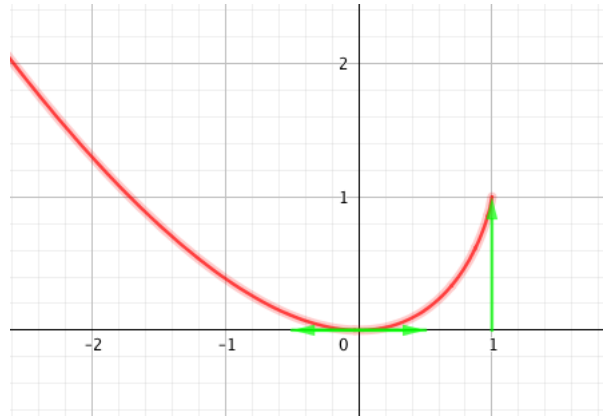
$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x + (1-x) \ln(1-x) \\
&= x + \ln(1-x) - x \ln(1-x) \\
&\underset{-\infty}{=} -x \ln(1-x) + o(x \ln(1-x)) \quad \text{car } x + \ln(1-x) \underset{-\infty}{=} o(x \ln(1-x)).
\end{aligned}$$

$$\text{Ccl : } \boxed{\varphi(x) \underset{-\infty}{\sim} -x \ln(1-x) \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty}.$$

4. • En 1 : la courbe admet une demi-tangente verticale (puisque le taux d'accroissement tend vers $+\infty$).

• En 0 : φ est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de 0 par théorèmes généraux et $\varphi''(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $\varphi''(0) = 1 > 0$.

Par conséquent la courbe de φ est au-dessus de sa tangente T_0 en 0. Or $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi(0) = 0$ donc T_0 a pour équation $T_0 : y = 0$.



5. (a) • La fonction $t \mapsto t \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 t \ln(t) dt$ est donc uniquement impropre en 0.
 • Soit $A \in]0, 1]$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= t & v(t) &= \frac{1}{2} t^2 \end{aligned}$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[A, 1]$.
 On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t \ln(t) dt &= \left[\frac{1}{2} t^2 \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} t^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (1^2 \ln(1) - A^2 \ln(A)) - \frac{1}{2} \int_A^1 t dt \\ &= -\frac{1}{2} A^2 \ln(A) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_A^1 \\ &= -\frac{1}{2} A^2 \ln(A) - \frac{1}{4} (1 - A^2) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4} \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{A \rightarrow 0} A^2 \ln(A) = 0 & \text{par croissances comparées} \\ \lim_{A \rightarrow 0} A^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ccl: On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 t \ln(t) dt$ est convergente vaut $-\frac{1}{4}$.

- (b) • D'après la question 1., la fonction φ est continue sur le segment $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 \varphi(t) dt$ est donc bien définie.

• Par linéarité :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(t) dt &= \int_0^1 t + (1-t) \ln(1-t) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1-t) \ln(1-t) dt \end{aligned}$$

Notons qu'on peut bien appliquer la linéarité de l'intégrale car les intégrales $\int_0^1 \varphi(t) dt$ et $\int_0^1 t dt$ sont convergentes, et donc

l'intégrale $\int_0^1 (1-t) \ln(1-t) dt$ est bien convergente.

Tout d'abord :

$$\int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

• Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-t) \ln(1-t) dt$ (dont on sait qu'elle est convergente), on effectue le changement de variable affine $u = 1 - t$.

On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t) \ln(1-t) dt = \int_1^0 u \ln(u) (-du) = \int_0^1 u \ln(u) du = -\frac{1}{4}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la question précédente.

Ccl: On en déduit : $\int_0^1 \varphi(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Remarque

1. Le programme officiel stipule que "les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque". Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).

2. Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k &= \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} \quad \text{en reconnaissant une somme géométrique} \\ &= \frac{t^n}{1-t} \end{aligned}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En remarquant que $-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$, on pense à intégrer l'égalité précédente entre 0 et x .

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k \quad \text{par linéarité} \\ &= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt \quad \text{à nouveau par linéarité} \\ &= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \\ &= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{k+1} k+1 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $t \in [0, x]$ on a $1-t \geq 1-x \Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$.

En intégrant cet encadrement sur $[0, x]$ (avec $x \geq 0$) et par croissance de l'intégrale on obtient l'encadrement :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt$$

Or

$$\int_0^x t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{n+1}.$$

Ccl: on a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

On a évidemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$ (puisque x est fixé et l'on fait tendre $n \rightarrow +\infty$).

D'après le théorème d'encadrement on obtient donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

8. D'après la question 6.(b) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ par changement d'indice et d'après la question 7 on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

On en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ ce qui montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge.

Ccl: La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. (a) De manière immédiate on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Donc $a=1$ et $b=-1$ conviennent.

- (b)

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - \sum_{k \geq 2} \frac{x^k}{k} \\ &= x \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - \left(\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} - x \right) \quad \text{le 1er terme de la 2ème somme vaut } x \\ &= (x-1) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} + x \quad \text{car les deux sommes précédentes sont identiques} \end{aligned}$$

On reconnaît la série dont on a prouvé la convergence à la question précédente.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et de plus :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= (x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= (x-1) \times (-\ln(1-x)) + x \\ &= x + (1-x) \ln(1-x) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

10. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ est une série télescopique.

Cette série converge car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge et de plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1 = \varphi(1).$$

Ccl: La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilité

11. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

- B_k "on obtient une boule bleue au k tirage"
- R_k "on obtient une boule rouge au k tirage"

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

L'événement $(N = n)$ est réalisé si et seulement si lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n-1$ boules bleues et 1 boules rouges. Autrement dit, $(N = n)$ est réalisé si et seulement si, lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $n-1-1 = n-2$ boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire si et seulement si on a pioché $n-2$ boules bleues puis la boule rouge. Ainsi :

$$(N = n) = B_1 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((N = n)) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

(b) La variable aléatoire N admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 2} n \mathbb{P}(N = n)$ converge absolument.

Or la série est à termes positifs et $\sum_{n \geq 2} n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

On reconnaît la série harmonique qui est divergente donc $\sum_{n \geq 2} n \mathbb{P}(N = n)$ diverge.

Ccl: N n'admet pas d'espérance.

12. On remarque que tant que l'expérience continue, il y a une boule rouge et un nombre b de boules bleues. A chaque étape la probabilité de tirer une boule bleue est donc $\frac{b}{b+1}$.

```

1 def simuleN () :
2   b=1 #b designe le nbre de boules bleues dans l'urne
3   while rd.random() < b/(b+1) :
4     b=b+1
5   return b

```

13. (a) Si l'événement $(N = n)$ est réalisé cela signifie que dans la définition de T le maximum se fait sur X_1, \dots, X_n .

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(N=n)}(T \leq x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x) \quad \text{car les variables sont mutuellement indépendantes} \\ &= (F(x))^n \quad \text{car } F \text{ est la fonction de répartition commune de toutes les variables.} \end{aligned}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $((N = n))_{n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(T \leq x) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (F(x))^n \times \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{k+1}}{k(k+1)} \\ &= \varphi(F(x)) \text{ d'après le résultat de la question 9.(b)} \end{aligned}$$

14. (a)

```

1 def simuleT():
2     N=simuleN()
3     return np.max(nr.random(N))

```

(b) La fonction `mystere` crée trois échantillons de 1000 réalisations de la variable T puis stocke leurs moyennes empiriques respectives dans la liste `m`.

Les sorties donnent trois nombres proches de 0.75.

On peut donc conjecturer que T admet une espérance et que $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{4}$.

(c) D'après la question 13.(b) on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$.

Or dans cette question, les X_i suivent la loi $\mathcal{U}[0, 1]$, donc $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Par ailleurs $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$ donc on a bien $\mathbb{P}(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

(d) Notons G la fonction de répartition de T et montrons qu'elle vérifie les conditions d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

D'après la question précédente on a :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

• G est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par théorèmes généraux.

• G est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et de plus :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{cases} \Rightarrow G \text{ est continue en } 0.$$

De même on montre que G est continue en 1.

Donc G est continue sur \mathbb{R} .

Ccl : T est une variable à densité.

(e) On obtient une densité de probabilité g de T en dérivant G là où cela a un sens. Ainsi, en complétant la fonction par 0 en 1, on obtient :

$$g(t) = \begin{cases} \varphi'(t) & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow g(t) = \begin{cases} -\ln(1-t) & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On notera que $\ln(1-t)$ est négatif sur $[0, 1[$ et donc g est bien positive.

La variable T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = - \int_0^1 t \ln(1-t) dt$ converge absolument.

Par changement de variable affine on

$$\int_0^1 t \ln(1-t) dt = - \int_1^0 (1-u) \ln(u) du = \int_0^1 (\ln(u) - u \ln(u)) du$$

Or :

• $\int_0^1 u \ln(u) du$ converge et vaut $-\frac{1}{4}$ (vu à la question 5.(a) de la partie 1)

• $\int_0^1 \ln(u) du$ converge et vaut -1 (intégrale logarithmique).

Donc par linéarité l'intégrale $\int_0^1 t \ln(1-t) dt$ converge

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \ln(1-t) dt &= \int_0^1 \ln(u) du - \int_0^1 u \ln(u) du \\ &= -1 + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 t \ln(1-t) dt = - \int_0^1 t \ln(1-t) d = \frac{3}{4}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$ converge et vaut $\frac{3}{4}$.

Ccl: T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{4}$.

15. (a) Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors sa fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (b) En notant G la fonction de répartition de T on a :

$$G(x) = \varphi(F(x))$$

1er cas : $x < 0$. Dans ce cas $G(x) = \varphi(0) = 0$.

2ème cas : $x \geq 0$. Dans ce cas $e^{-\lambda x} \in [0, 1]$ puisque $\lambda > 0 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1]$.

Donc,

$$\begin{aligned} \varphi(1 - e^{-\lambda x}) &= 1 - e^{\lambda x} + (1 - (1 - e^{-\lambda x})) \ln(1 - (1 - e^{-\lambda x})) \\ &= 1 - e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \ln(e^{-\lambda x}) \\ &= 1 - e^{\lambda x} + e^{\lambda x} (-\lambda x) \\ &= 1 - (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$\text{Ccl: } G(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (c) La fonction G est :

- de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* par théorèmes généraux
- elle est donc également continue sur \mathbb{R}^* , de plus elle est continue en 0 puisque :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} = 0 \end{cases}.$$

Ccl: T est une variable à densité.

De plus on obtient une densité g de T en dérivant G là où cela a un sens et en ajoutant une valeur arbitraire en 0. D'où :

$$g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

En effet, détaillons le calcul de la dérivée sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad G'(t) &= (\lambda - \lambda(1 - \lambda)) e^{-\lambda t} \\ &= (\lambda - \lambda + \lambda^2) e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

- (d) T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt$ converge absolument.

La fonction étant positive, il suffit de montrer que l'intégrale converge.

De plus :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt &= \lambda \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{X_1}(t) dt \quad \text{où } f_{X_1} \text{ désigne une ddp de } X_1 \end{aligned}$$

Or on sait que X_1 suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, donc X_1 admet un moment d'ordre 2 (et une variance) donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{X_1}(t) dt$ converge et vaut $\mathbb{E}(X_1^2)$.

De plus d'après la formule de Koenig-Huygens on a :

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{X_1}(t) dt &= \lambda \mathbb{E}(X_1^2) \\ &= \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} \\ &= \frac{2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ccl: T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = \frac{2}{\lambda}$.