

ECG2 - 2024-2025

DS N°1

MATHÉMATIQUES

(4H)



La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- . les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés en rouge),*
- . les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet,*
- . il est possible d'admettre le résultats d'une question à condition de bien en préciser le numéro.*

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1 :

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $(A - 3I)^2$.
 - En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .
- On note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.
 - En résolvant l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, montrer qu'il existe U_1 et U_2 deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera tels que $F = \text{Vect}(U_1, U_2)$.
 - La famille (U_1, U_2) est-elle une base de F ?
- On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.
 - Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 - Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.
- Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I + N$.
 - Calculer N^2 et en déduire N^k pour $k \in \mathbb{N}$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer T^n comme combinaison linéaire de I et de N .
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T .
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.
 - Vérifier que la formule trouvée à la question précédente reste valable pour $n = -1$.

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}$.

Partie I : Étude de la fonction f

- Rappeler la valeur de la limite $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X}$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$.
 - Factoriser l'expression $\varphi(x)$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.
- Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R}_+^* et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$
 - En déduire les variations de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
 - En déduire les variations de φ' puis montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) \geq e$.
- Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de φ sur \mathbb{R}_+^* .
Indication : on montrera que φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^ .*
- Montrer que : $\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) \geq ex$.
On donne : $\varphi(3) > 15$.

Partie II: Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$.

Indication : utiliser la question 3 de la Partie I

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
4. Ecrire une fonction Python, d'en-tête `def plus_petit_entier(A)` : qui prend en argument un réel $A \geq 0$ et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$.
5. **(khûbes)**

- (a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge. On note S sa somme.

- (b) Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq S - \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3(e-1)e^n}.$$

- (c) En déduire une fonction Python d'en-tête `def valeur_approchee_s(eps)` : qui, prenant en argument un réel $\text{eps} > 0$ renvoie une valeur approchée de S à eps près.

Partie III: Étude d'une suite implicite

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution, notée v_n dans \mathbb{R}_+^* .

Préciser la valeur de v_0 .

2. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

3. (a) Justifier que $0 < v_1 < 2$ et que : $\forall n \geq 2, \quad 1 < v_n < n$.

Indication : on donne $\varphi(2) > 4$.

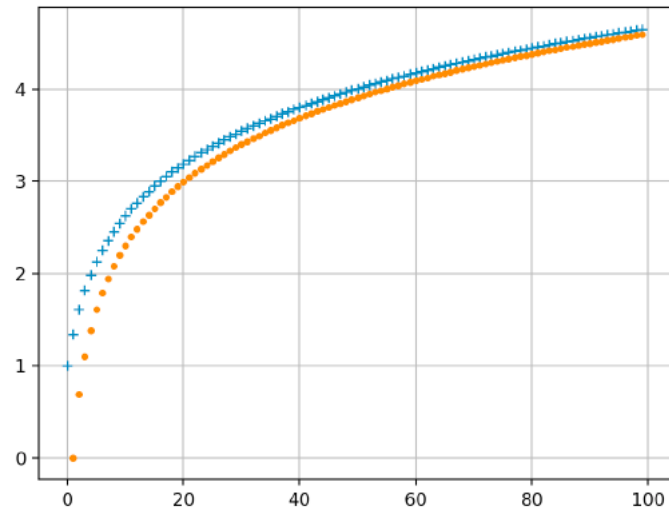
- (b) On admet avoir écrit une fonction Python d'en-tête `def suite_v(n)` : qui prend en argument un entier n et renvoie une valeur approchée de v_n à 10^{-3} près. On considère le script suivant :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 N=[k for k in range(100)]
4 Y=[suite_v(k) for k in N]
5 Z=[np.log(k) for k in N]
6 plt.grid()
7 plt.plot(N,Y, '+')
8 plt.plot(N,Z, '.')
9 plt.show()

```

On obtient l'affichage suivant :



Conjecturer un équivalent simple de v_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

4. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

(b) En déduire que $e^{v_n} \sim n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) Démontrer alors la conjecture émise à la question 3.(b) de la Partie III.

EXERCICE 3

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p .

On procède à l'expérience suivante \mathcal{E} : "On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce".

On note :

- pour tout entier naturel non nul j , F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j -ième lancer";
- pour tout entier naturel non nul n , X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

"FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE"

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience \mathcal{E} .

Partie I : Simulation informatique (facultatif)

1. On considère la fonction Python suivante :

```

1 import random as rd
2 def lancer(p):
3     piece=0
4     if rd.random()<p:
5         piece=1
6     return piece

```

Décrire précisément le rôle de cette fonction.

2. Compléter la fonction Python qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués.

```

1 def premier_pile(p):
2     X=1
3     while lancer(p)==0:
4         X=.....
5     return X

```

3. Écrire une fonction en Python d'en-tête `def Y=simuleY(p)` : qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second PILE, et affiche le nombre de FACE obtenus en tout.

Partie II : Étude théorique.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que X_n suite la loi binomiale de paramètres n et p . Préciser la valeur de son espérance et de sa variance.
2. Déterminer le support $Y(\Omega)$ de la variable aléatoire Y .
3. Déterminer, en le justifiant, les valeurs des probabilités :

$$P(Y = 0), \quad P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P(Y = 2).$$

4. Soit n un entier naturel. Justifier que :

$$(Y = n) = (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}.$$

5. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = (n + 1)p^2 q^n.$$

6. Vérifier par le calcul que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1.$$

7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k -ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k .