

CORRECTION DU DS1

EXERCICE 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

1. (a) On commence par calculer explicitement la matrice $A - 3I$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit par calculs matriciels que $(A - 3I)^2 = 0$.

- (b) Comme A et $3I$ commutent, on peut aussi développer la relation précédente pour obtenir :

$$A^2 - 6A + 9I = 0 \iff 9I = 6A - A^2 \iff 9I = A(6I - A) \iff A\left(\frac{1}{9}(6I - A)\right) = I.$$

Ccl : La matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{9}(6I - A)$.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff (A - 3I)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff y = 2z - 2x \quad \text{car toutes les lignes sont proportionnelles}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 2z - 2x \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect}(U_1, U_2). \end{aligned}$$

en posant : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (b) La question précédente montre que la famille (U_1, U_2) est génératrice de F .
Par ailleurs, (U_1, U_2) est libre puisque les vecteurs sont clairement non-colinéaires.

Conclusion : (U_1, U_2) est une base de F .

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) On utilise la méthode du pivot de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & & \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \\ & & & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3, L_1 \leftarrow L_1 + L_3} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right). \end{array}$$

On obtient une matrice triangulaire inférieure **avec tous les coefficients diagonaux non-nuls**.

On en déduit donc que P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (b) On vérifie bien par calculs matriciels que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (c) Par récurrence :

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $A^0 = I$ et $T^0 = I$, ce qui donne :

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I = T^0.$$

La propriété est bien initialisée.

• Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \geq 0$, on ait $P^{-1}A^nP = T^n$.

Alors

$$T^{n+1} = T.T^n = P^{-1}AP.P^{-1}A^nP = P^{-1}A.A^nP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Et la propriété est bien héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = P^{-1}A^nP$.

4. (a) On trouve :

$$N = T - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) On constate sans difficulté que $N^2 = 0$ et une récurrence immédiate donne $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$.
En effet, si $N^k = 0$ alors $N^{k+1} = N.N^k = N.0 = 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

On a par définition $T = N + 3I$ et bien entendu N et $3I$ **commutent**. On peut donc utiliser la formule du binôme matriciel :

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (3I)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} (3I)^n N^0 + \binom{n}{1} (3I)^{n-1} N^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} N^k (3I)^{n-k}}_{=0} \\ &= 3^n I + n3^{n-1} N. \end{aligned}$$

• Vérifions la formule trouvée pour $n = 1$: $3^1 I + 3^0 N = 3I + N$ est bien égale à T . Donc la formule est vraie au rang $n = 1$.

• Vérifions la formule trouvée pour $n = 0$: $3^0 I + 0 = I$ est bien égale à $T^0 = I$. Donc la formule est vraie au rang $n = 0$.

$$\text{Ccl : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = 3^n I + n3^{n-1} N}.$$

(d) Comme $N = T - 3I$, la formule précédente donne :

$$T^n = 3^n I + n3^{n-1} N = 3^n I + n3^{n-1} (T - 3I) = 3^n (1 - n) I + n3^{n-1} T.$$

$$\text{Ccl : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = 3^n (1 - n) I + n3^{n-1} T}.$$

5. (a) On passe d'une relation sur T^n à une relation sur A^n en utilisant la formule $A^n = P T^n P^{-1}$ déduite de la question 3.(c).

$$\begin{aligned} A^n &= P T^n P^{-1} \\ &= P(3^n (1 - n) I + n3^{n-1} T) P^{-1} \\ &= 3^n (1 - n) P I P^{-1} + n3^{n-1} P T P^{-1} \\ &= n3^{n-1} A - (n - 1) 3^n I. \end{aligned}$$

$$\text{Ccl : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = n3^{n-1} A - (n - 1) 3^n I}.$$

(b) Pour $n = -1$, la formule ci-dessus donnerait :

$$-3^{-2} A + 2 \cdot 3^{-1} I = -\frac{1}{9} A + \frac{2}{3} I = A^{-1} \quad \text{d'après la question 1.(b)}$$

Conclusion : la formule reste valable pour $n = -1$.

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(x) = e^x - x e^{\frac{1}{x}}$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = +\infty$ par croissances comparées donc en posant $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ on a $x e^{1/x} = \frac{e^X}{X}$ et donc par composition de limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty$.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \text{ donc par différence : } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty}.$$

(b) On a $\varphi(x) = e^x (1 - x e^{\frac{1}{x}-x})$ et de plus $x e^{\frac{1}{x}-x} = \frac{x}{e^x} \times e^{\frac{1}{x}}$. Or $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$ donc par continuité de la fonction exponentielle on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x e^{\frac{1}{x}-x} = 1$$

$$\text{et par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty}.$$

2. (a) φ est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R}_+^* comme composition ($x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$), produit ($x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$) et différence ($x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$) de fonctions elles mêmes de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R}_+^* .

Successivement on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi'(x) = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$

- (b) Avec $x > 0$ on a $x^5 > 0$ et $3x+1 > 0$ donc $\frac{3x+1}{x^5}$. La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'''(x) > 0.}$$

$$\text{Ccl : } \boxed{\varphi'' \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \varphi''(1) = 0.}$$

On en déduit le tableau de variation et le signe de φ' :

x	0	1	$+\infty$
signe de $\varphi'''(x)$		+	
variations de φ''			
signe de $\varphi''(x)$	-	0	+

- (c) D'après le tableau précédent on en déduit les variations de φ' sur \mathbb{R}_+^* avec $\varphi'(1) = e$:

x	0	1	$+\infty$
signe de $\varphi''(x)$	-	0	+
variations de φ'			

En particulier, φ' admet e pour minimum sur \mathbb{R}_+^* .

$$\text{Ccl : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) \geq e.}$$

- (d) D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de φ sur \mathbb{R}_+^* :


x	0	$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$	+	
variations de φ		

3. Pour montrer que : $\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) \geq ex$, il suffit de montrer que $\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) - ex \geq 0$.

Etudions la fonction $\psi : x \mapsto \varphi(x) - ex$ qui est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et telle que $\psi'(x) = \varphi'(x) - e$.

Or d'après la question 2.(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) \geq e$, donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi'(x) \geq 0.}$

On en déduit que ψ est strictement croissante sur $[3; +\infty[$, d'où le tableau de variation suivant :

x	3	$+\infty$
signe de $\psi'(x)$	+	
variations de ψ	$\underbrace{\psi(3)}_{>0}$ 	

On a $\psi(3) > 0$ car : $\psi(3) = \varphi(3) - 3e$ avec $e < 3$ donc $3e < 9$ et $\varphi(3) > 15$ donc $\psi(3) > 15 - 9 = 6$ donc $\Psi(3) > 0$.

Ccl: $\forall x \geq 3, \psi(x) \geq 0 \iff \varphi(x) \geq ex$.

Partie II: Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

1. On procède par récurrence.

• Initialisation : u_0 est naturellement bien défini et $u_0 = 3 \geq 3e^0$, donc la propriété est initialisée.

• Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \geq 0$, on ait u_n bien défini et $u_n \geq 3e^n$.

• en particulier, comme $e^n > 0$ donc $u_n > 0$ et u_n est dans l'ensemble de définition de φ , donc $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe.

• de plus $u_n \geq 3e^n$ implique $u_n \geq 3$ et donc d'après la question 3 de la Partie I :

$$\varphi(u_n) \geq eu_n \geq e \times 3e^n \iff u_{n+1} \geq 3e^{n+1}.$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 3e^n$.

2. Par récurrence.

• Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) \geq 3e$ d'après la question 3.

Or $e > 1$ donc $3e \geq 3$ donc $u_1 \geq u_0$.

• Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \geq 0$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$.

Par croissance de la fonction φ sur \mathbb{R}_+^* on a

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ et $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

3. D'après la question 1 de la Partie II, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3e^n$ et $e^n \rightarrow +\infty$.

Ccl : Par comparaison $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

4.

```

1 def plus_petit_entier(A):
2     u=3
3     n=0
4     while u<=A:
5         n=n+1
6         u=np.exp(u)-u*np.exp(1/u)
7     return n

```

5. (a) D'après la question 1 de la Partie II :

$$0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3e^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Or $\sum_n \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{e} \in]-1; 1[$. Donc la série $\sum_n \left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge.

Ccl : D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_n \frac{1}{u_n}$ converge.

On note S sa somme.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq S - \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{3\left(1 - \frac{1}{e}\right)} \\ &= \frac{1}{3(e-1)e^n}. \end{aligned}$$

(c) On obtient une valeur approchée de S à eps près avec la somme partielle de rang n dès que :

$$\frac{1}{3(e-1)e^n} < \text{eps}.$$

```

1 def valeur_approchee_s(eps):
2     u=3
3     S=1/u
4     n=0
5     while 1/(3*(np.exp(1)-1)*np.exp(n))>=eps:
6         n=n+1
7         u=np.exp(u)-u*np.exp(1/u)
8         S=S+1/u
9     return S

```

Partie III: Étude d'une suite implicite

1. D'après l'étude de φ dans la Partie I, φ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ (intervalle image), l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution notée v_n .

Par définition, v_0 est la solution de l'équation $\varphi(x) = 0$. Or $\varphi(1) = 0$ donc $v_0 = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- d'une part $\varphi(v_n) = n$
- d'autre part $\varphi(v_{n+1}) = n + 1$.

Par conséquent,

$$\varphi(v_n) < \varphi(v_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad v_n < v_{n+1}.$$

par croissance de φ

Ccl : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Remarquons que $\varphi(v_n) = v_n \iff v_n = \varphi^{-1}(n)$.

De plus, le théorème de la bijection dit également que φ^{-1} à la même monotonie que φ , qui est croissante.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de φ^{-1}		

D'où l'on tire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(n) = +\infty.$$

Ccl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$

3. Difficile !

- (a) • Montrons que $0 < v_1 < 2$.

Il est clair que par définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $v_1 > 0$. Il suffit donc de montrer que $v_1 < 2$ et par stricte croissance de φ , il suffit donc de montrer que $\varphi(v_1) < \varphi(2)$.

Or par définition de v_1 on a $\varphi(v_1) = 1$ et l'indication nous donne $\varphi(2) > 4$, donc on a bien $\varphi(v_1) < \varphi(2)$.

D'où l'encadrement $0 < v_1 < 2$.

• Montrons que $1 < v_2 < 2$. Par stricte croissance de φ il suffit de montrer l'encadrement $\varphi(1) < \varphi(v_2) < \varphi(2)$. Or, par définition de v_2 , $\varphi(v_2) = 2$, donc il suffit de montrer $\varphi(1) < 2 < \varphi(2)$.

De plus $\begin{cases} \varphi(1) = 0 \text{ et donc on a bien } \varphi(1) < 2 \\ \varphi(2) > 4 \text{ d'après l'indication donc on a aussi } \varphi(2) > 2. \end{cases}$

D'où l'encadrement $1 < v_2 < 2$.

• Montrons que pour tout $n \geq 3$: $1 < v_n < n$.

Par stricte croissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $n \geq 3$ on a $v_n > v_2 > 1$ donc il suffit de montrer que $v_n < n$.

Maintenant par stricte croissance de φ il suffit de montrer l'encadrement $n < \varphi(n)$.

Or d'après la question 3. de la Partie I, pour tout $n \geq 3$: $\varphi(n) \geq en > n$ car $e > 1$.

D'où l'encadrement $\forall n \geq 3, 1 < v_n < n$.

- (b) Le programme a permis l'affichage des 100 premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mais aussi des 100 premiers termes de la suite $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}}$ qu'on constate très très proches pour n grand. On peut alors établir que : $\text{Conjecture : } v_n \sim \ln(n)$.

- (a) Par définition de chaque terme de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \varphi(n) = n &\iff e^{v_n} - v_n \exp\left(\frac{1}{v_n}\right) = n \\ &\iff \frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right) \end{aligned}$$

- (b) Comme $v_n \rightarrow +\infty$, on a :

• $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0$ et donc $\exp\left(\frac{1}{v_n}\right) \rightarrow 1$.

• De plus, par croissances comparées, $\frac{e^{v_n}}{v_n} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{v_n}{e^{v_n}} \rightarrow 0$.

Il s'ensuit que : $1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right) \rightarrow 1$.

Ccl: $\frac{n}{e^{v_n}} \rightarrow 1 \iff e^{v_n} \sim n$.

- (c) **Attention on ne peut pas composer les équivalents !**

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(e^{v_n}) \quad \text{toujours vrai} \\ &= \ln\left(n \times \frac{e^{v_n}}{n}\right) \\ &= \ln(n) + \ln\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right) \\ &= \ln(n) + o(\ln(n)) \quad \text{puisque } \ln\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right) = o(1) \text{ car } \frac{e^{v_n}}{n} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Ccl: $v_n \sim \ln(n)$ comme conjecturé à la question 3.(b) de la Partie III.

EXERCICE 3

Partie I : Simulation informatique.

1. La fonction a pour but de simuler la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la pièce tombe sur PILE et 0 si elle tombe sur FACE.
- 2.

```

1 def premier_pile(p):
2     X=1
3     while lancer(p)==0:
4         X=X+1
5     return X

```

3.

```

1 def simuleY(p):
2     X=premier_pile(p)
3     Y=X-1
4     while lancer(p)==0:
5         Y=Y+1
6     return Y

```

Partie II : Étude théorique.

1. X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ car X_n compte le nombre de succès (= obtenir un PILE) au cours de n répétitions (= lancers) d'une épreuves de Bernoulli (= faire PILE ou FACE) de paramètre p (= probabilité de faire PILE).

De plus d'après nos connaissances de cours : $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1 - p)$.

2. Y peut prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{N} . En effet, entre deux PILE on peut avoir autant de FACE que possible. Plus précisément, si $k \in \mathbb{N}^*$ on l'événement $P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}$ est contenu dans $(Y = k)$. Par ailleurs on a aussi $P_1 \cap P_2$ qui prouve que $(Y = 0)$ est possible.
3. • $(Y = 0) = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$. Les lancers étant indépendants, $P(Y = 0) = p^2$.

$$\bullet (Y = 1) = \left((F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \right).$$

De plus par incompatibilité des événements et indépendance des lancers : $P(Y = 1) = 2p^2q$:

$$\bullet (Y = 2) = \left((F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \overline{F_4}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4}) \right)$$

et donc par incompatibilité des événements et indépendance des lancers $P(Y = 2) = 3p^2q^2$.

4. $(Y = n)$ veut dire exactement que le $n + 2$ ième lancer a donné pile et qu'il y avait un seul autre pile dans les $n + 1$ lancers précédents. C'est exactement $\overline{F_{n+2}} \cap (X_{n+1} = 1)$.
5. X_{n+1} ne dépend que des $n + 1$ premiers lancers qui sont indépendants du lancer $n + 2$.
Donc les événements $(X_{n+1} = 1)$ et $\overline{F_{n+2}}$ sont indépendants et donc on a :

$$P(Y = n) = P(X_{n+1} = 1)P(\overline{F_{n+2}}) = (n + 1)p^2q^n.$$

6. On reconnaît une série géométrique dérivée. En effet

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)p^2q^n = p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} Iq^{i-1} = \frac{p^2}{(1 - q)^2} = 1.$$

7. $E(Y)$ existe si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n)$ converge absolument. Les termes étant tous positifs, il suffit de montrer que la série converge. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} nP(Y = n) &= p^2 \sum_{n \geq 0} n(n+1)q^n \\ &= p^2 \sum_{k \geq 1} k(k-1)q^{k-1} \\ &= p^2 q \sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}. \end{aligned}$$

On reconnaît donc une série géométrie dérivée seconde de raison $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$. Donc $|q| < 1$ et la série $\sum_{n \geq 0} nP(Y = n)$ converge.

Ceci prouve que Y admet une espérance.

De plus,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y = n) \\ &= p^2 q \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} \\ &= p^2 q \times \frac{2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{2p^2 q}{p^3} \\ &= \frac{2q}{p}. \end{aligned}$$

Ccl: Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{2q}{p}$.

8. En raisonnant comme dans les questions 5. et 6. on constate que Y_k peut prendre toutes les valeurs entières et que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(Y_k = n) = (X_{n+k-1} = k-1) \cap \overline{F_{n+k}}$$

et donc par indépendance des événements on en déduit que $P(Y_k = n) = \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1} q^n p = \binom{n+k-1}{k-1} q^n p^k$. En effet, il y a $k-1$ parmi $n+k-1$ choix de positionnement des $k-1$ premiers PILE dans les $n+k-1$ premiers lancers.