ECG2 - 2023-2024

DS N°2
MATHÉMATIQUES
(4H)

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
. les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
. les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1 :

On considère f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-x+2y+z, -x-y-2z, x+y+2z).$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Partie I : étude de l'endomorphisme f

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $Im(f)$.
   (c) f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. On pose $u = (-1,-1,1)$. Montrer que $u \in Ker(f)$ puis en déduire que $Ker(f) = Vect(u)$.
3. On pose $v = (2,-1,1)$ et $w = (-1,2,1)$.
   (a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que l'on a $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}, f(v) = 3u$ et $f(w) = 3v$.
4. On rappelle que $f^3 = f \circ f \circ f$.
   (a) Montrer que : $f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}, f^3(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f^3(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$. *Détaillez vos calculs.*
   (b) Conclure que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ *(c'est à-dire que $\forall e \in E, \quad f^3(e) = 0_{\mathbb{R}^3}$).*

Parie II : équation $g^2 = f$

Dans cette partie on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g^2 = f$.
On suppose par l'absurde qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$.

5. Montrer que $g \circ f = f \circ g$.
6. (a) Montrer que $g(u) \in Ker(f)$ puis en déduire l'existence d'un réel a tel que $g(u) = au$.
   (b) Montrer également que $g(v) - av \in Ker(f)$ puis en déduire l'existence d'un réel b tel que $g(v) = bu + av$.
7. (a) Calculer $g^2(u)$ en fonction de a et u puis en déduire que $a = 0$.
   (b) Calculer ensuite $g^2(v)$ en fonction de b et v puis en déduire une contradiction.
   (c) Conclure.

EXERCICE 2 :

On considère les fonctions suivantes définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = x - f(x).$$

On rappelle que $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : étude de f

1. (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$, exprimer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f. *On justifiera soigneusement les limites aux bornes à l'aide d'équivalents simples.*

   (b) Déterminer le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2. En déduire l'équation de la tangente en 0 à la courbe de f puis la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. *On y fera figurer la tangente en* 0 *et l'asymptote verticale.*

2. (a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$, exprimer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations complet de la fonction g. *On justifiera soigneusement les limites aux bornes à l'aide d'équivalents simples..*

   (b) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle à déterminer, puis en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$, notée α.

   (c) Montrer que $1 < \alpha < 3$.

Partie II: valeur approchée de α par la méthode du point fixe

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 1$.
4. Établir : $\forall x \in [1;+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
5. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
7. Conclure quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def approx_alpha(eps):` prenant en argument un réel eps>0 qui renvoie un couple (u_n, n) tel que:

$$|u_n - \alpha| < \texttt{eps}.$$

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :
• Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
• Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Reconnaitre loi de X_1, ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1.
   On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :
   $$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}.$$
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.
3. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\big(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\big).$$
   (b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$
   (d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$
4. (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\big(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\big).$$
   (b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.
   (c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$
5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}.$$
   En déduire sans calcul que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-colonne de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$: $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

7. (a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que l' on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$.
   (b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.
   (c) Déterminer U_0 puis en déduire la première colonne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres colonnes de la matrice A^n.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. (a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.
    (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.
    (c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique

11. Donner une interprétation de la fonction suivante dans le contexte de l'exercice :

```
import random as rd

def saut(i):
    s=rd.randint(1,4)
    x=i+s
    if x==5:
        x=1
    if x==6:
        x=2
    if x==7:
        x=4
    return x
```

12. (a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle affiche les n premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses n premiers déplacements.

```
import numpy as np

def retours(n):
    L= ......
    nbre= .....
    x=1
    for _ in range(n):
        x=saut(x)
        ..............
        if ............:
            nbre=nbre+1
    return L,nbre
```

    (b) Après avoir exécuté cinq fois ce script avec `n=100` les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : `nbre=23`, `nbre=28`,`nbre=23`, `nbre=25`, `nbre=26`. En quoi est-ce normal ?