ECG2 - 2024-2025

DS N°2
CORRECTION
(4H)

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
. les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
. les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1 :

Partie I : étude de l'endomorphisme f

1. (a) Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:
• par définition f va bien de $\mathbb{R}^3$ dans lui même.
• mq. f est linéaire :
Soient $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
On note $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u+\mu v) &= f\big(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z'\big) \\ &= \big(-(\lambda x+\mu x')+2(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'), -(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')-2(\lambda z+\mu z'), \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+2(\lambda z+\mu z')\big) \\ &= \lambda\big(-x+2y+z, -x-y-2z, x+y+2z\big)+\mu\big(-x'+2y'+z', -x'-y-2z', x'+y'+2z'\big) \\ &= \lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z') \\ &= \lambda f(u)+\mu f(v). \end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire.

Ccl : Les deux points précédents montrent que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

(b) Par propriété du cours, avec (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a ; $Im(f) = \big((\text{Vect}\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)\big)$.
Or

$$f(e_1) = (-1,-1,1), \quad f(e_2) = (2,-1,1), \quad f(e_3) = (1,-2,2).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} Im(f) &= \text{Vect}\big((-1,-1,1),(2,-1,1),(1,-2,2)\big) \\ &= \text{Vect}\big((-1,-1,1),(2,-1,1)\big) \quad \text{car } (-1,-1,1)+(2,-1,1) = (1,-2,2) \end{aligned}$$

Or la famille $\big((-1,-1,1),(2,-1,1)\big)$ est libre car les vecteurs sont non-colinéaires.

Ccl : $\boxed{\big((-1,-1,1),(2,-1,1)\big) \text{ est une base de } Im(f) \text{ et } dim(Im(f)) = 2}$.

(c) D'après la question précédente $Im(f) \neq \mathbb{R}^3$ puisque $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et $dim(Im(f)) = 2$, donc f n'est pas surjectif et donc pas bijectif.

Ccl : $\boxed{f \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

2. Par calcul immédiat $f(u) = f(-1,-1,1) = (0,0,0)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\boxed{u \in Ker(f)}$.

D'après le théorème du rang on a : $dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - rg(f)$ et $rg(f) = 2$ donc $\boxed{dim(Ker(f)) = 1}$.

Vu que $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ appartient à $Ker(f)$ on a bien $\boxed{Ker(f) = \text{Vect}(u)}$.

3. (a) La famille (u,v,w) étant constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que cette famille est libre pour en déduire automatiquement que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Supposons que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
On obtient alors le système linéaire suivant : $\begin{cases} -\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2-3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$.

Ce qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et prouve que (u,v,w) est libre et donc que $\boxed{(u,v,w) \text{ est base de } \mathbb{R}^3}$.

(b) On a déjà vu que $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et par des calculs immédiats on trouve :

$$\begin{aligned} f(v) &= f(2,-1,1) = (-3,-3,3) &&\Rightarrow \quad f(v) = 3u \\ f(w) &= f(-1,2,1) = (6,-3,3) &&\Rightarrow \quad f(w) = 3v. \end{aligned}$$

4. (a) En utilisant la linéarité de f :

$$\begin{aligned} f^3(u) &= f^2(f(u)) = f^2(0_{\mathbb{R}^3}) &&\Rightarrow \quad f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ f^3(v) &= f^2(f(v)) = f^2(3u) = 3f^2(u) = 3f(f(u)) = 3f(0_{\mathbb{R}^3}) &&\Rightarrow \quad f^3(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ f^3(w) &= f^2(f(w)) = f^2(3v) = 3f(f(v)) = 3f(3u) = 9f(u) &&\Rightarrow \quad f^3(w) = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

(b) Montrons que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, c'est à dire que f^3 est l'endomorphisme nul.
Soit $e \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. D'après la question 3.(a), (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ donc on peut décomposer e dans cette base.
On peut donc écrire $e = \alpha u+\beta v+\gamma w$ avec $(\alpha,\beta,) \in \mathbb{R}^3$.
On obtient donc :

$$\begin{aligned} f^3(e) &= f^3(\alpha u+\beta v+\gamma w) \\ &= \alpha f^3(u)+\beta f^3(v)+\gamma f^3(w) \quad \text{par linéarité de } f^3 \\ &= 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{d'après les calculs précédents} \end{aligned}$$

On a donc montré que l'image de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ par f^3 est nulle.

Ccl : $\boxed{f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}}$.

Parie II : équation $g^2 = f$

5. On suppose que $g^2 = f$ donc :

$$g \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f \circ f^2 = f \circ g.$$

Remarque : on dit que f et g commutent.

6. (a) On a $f(g(u)) = (f \circ g)(u) = (f^\circ f^2)(u) = f^3(u) = 0$ puisque d'après la question 4.(c) f^3 est l'endomorphisme nul.

Comme $f(g(u)) = \overrightarrow{0}$ on en déduit que $\boxed{g(u) \in Ker(f)}$.

De plus d'après la question 2.(a) on sait que $Ker(f) = \text{Vect}(u)$. Mais Vect(u) est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u, donc $g(u) \in Ker(f)$ implique l'existence d'un réel a tel que $\boxed{g(u) = au}$.

(b) De la même manière on a :

$$\begin{array}{rcl} f(g(v) - av) & = & (f(g(v)) - af(v) \quad \text{par linéarité de } f \\ & = & (f \circ g)(v) - 3au \quad \text{car } f(v) = 3u \text{ d'après 3.(b)} \\ & = & (g \circ f)(v) - 3au \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent} \\ & = & g(f(v)) - 3au \\ & = & g(3u) - 3au \quad \text{car à nouveau d'après 3.(b)} \\ & = & 3g(u) - 3au \quad \text{par linéarité de } g \\ & = & 3au - 3au \quad \text{car } g(u) = au \text{ d'après la question précédente} \\ & = & \overrightarrow{0}. \end{array}$$

Par conséquent on en déduit que $g(v) - av \in Ker(f)$ et en suivant le même raisonnement qu'à la question précédente on en déduit l'existence d'un réel b tel que $g(v) - av = bu$ ce qui revient à dire que $\boxed{g(v) = av + bu}$.

7. (a) D'une part :

$$\begin{array}{rcl} g^2(u) & = & g(g(u)) \\ & = & g(au) \quad \text{d'après 6.(a)} \\ & = & ag(u) \quad \text{par linéarité de } g \\ & = & a^2 u \quad \text{à nouveau d'après 6.(a).} \end{array}$$

D'autre part , par hypothèse sur g on a $g^2(u) = f(u)$ et puisque $u \in Ker(f)$, on également $g^2(u) = 0$.

On obtient donc l'égalité $a^2 u = 0$ avec $u \neq \overrightarrow{0}$. On en déduit donc que $a^2 = 0$ et donc $\boxed{a = 0}$.

(b) A nouveau, d'une part :

$$\begin{array}{rcl} g^2(v) & = & g(g(v)) \\ & = & g(bu + av) \quad \text{d'après 6.(b)} \\ & = & bg(u) \quad \text{par linéarité de } g \text{ et puisque } a = 0 \\ & = & bau \quad \text{d'après 6.(a)} \\ & = & 0 \quad \text{puisque } a = 0. \end{array}$$

D'autre part $g^2(v) = f(v)$ donc $g^2(v) = 3u$ d'après 3.(b).

On obtient alors l'égalité $3u = 0$ avec $u \neq 0$. On abouti donc à une $\boxed{\text{contradiction}}$.

(c) L'hypothèse de l'existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = f$ était bien une hypothèse absurde.

<u>Ccl :</u> $\boxed{\text{Il n'existe donc pas de solution à l'équation } g^2 = f \text{ dans } \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

Remarque : un tel endomorphisme g tel que $g^2 = f$ est appelé une "racine carrée" de f. On peut donc reformuler la conclusion de cet exercice en disant que l'endomorphisme f n'admet pas de racine carrée dans l'espace $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

EXERCICE 2 :

On considère les fonctions suivantes définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+\ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x)=x-f(x).$$

On rappelle que $\ln(2)\approx 0,69$.

Partie I : étude de f

1. (a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ par théorème généraux.

   De plus : $\forall x>-1,\quad \boxed{f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0}$ car $x+1>0$ pour tout $x>-1$.

   Limites aux bornes : $f(x)=1+\ln(1+x)$

   • $f(x)\underset{-1}{\sim}\ln(1+x)$ et de plus $\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} x+1=0^+\\ \lim\limits_{X\longrightarrow 0^+}\ln(X)=-\infty\end{cases}$ $\Rightarrow$ (par composition) $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\ln(1+x)=-\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=-\infty}$.

   • $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$ car $f(x)=1+\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)$ donc $f(x)=1+\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$ et de plus on a $1+\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\underset{+\infty}{=}o(\ln(x))$.

   $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)=+\infty}$.

   D'où le tableau suivant :

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

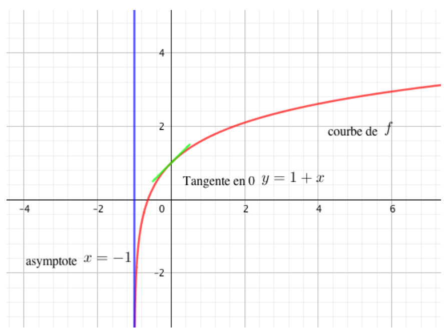
   (b) A l'aide du développement limité usuel de $\ln(1+x)$ on a :

$$\boxed{f(x)\underset{0}{=}1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}.$$

   On en déduit immédiatement que $\boxed{y=x+1 \text{ est l'équation de la tangente en 0 à la courbe de } f}$.

   De plus comme le coefficient a_2 du développement limité est négatif ($a_2=-\frac{1}{2}$), on en déduit que la courbe de f est en dessous de sa tan

   (c)



2. (a) g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ par théorèmes généraux.

   De plus : $\forall x>-1,\quad g'(x)=1-f'(x)=1-\frac{1}{x+1} \quad\Rightarrow\quad \boxed{g'(x)=\dfrac{x}{x+1}}$.

Le signe de $g'(x)$ sur $[-1;+\infty[$ dépend donc uniquement du signe de x.

Par ailleurs, on a $g(x)=x-1-\ln(1+x)$

• $g(x)\underset{-1^+}{\sim}-\ln(1-x)$ puisque $x-1\underset{-1^+}{\sim}-2$ et $-2\underset{-1^+}{=}o(\ln(1+x))\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} g(x)=+\infty}$.

• $g(x)\underset{+\infty}{\sim}x$ puisque $\ln(1+x)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$ et $\ln(x)\underset{+\infty}{=}o(x)$ par croissances comparées $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x)=+\infty}$.

D'autre part $g(0)=-1$

D'où le tableau :

x	-1		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On aura bien sûr remarqué que $f(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$.
D'après la question précédente, sur $]0;+\infty[$, g est une fonction strictement croissante et continue (car dérivable). Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-1;+\infty[$. Comme $0 \in]-1;+\infty[$ (intervalle image), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.
Ccl : L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution dans $]0;+\infty[$, notée α.

(c) Evaluons les images $g(1)$ et $g(3)$ avec l'approximation $\ln(2) \approx 0,69$ donnée dans l'énoncé :
$$\begin{cases} g(1) = -\ln(2) < 0 \\ g(3) = 2 - \ln(4) = 2(1 - \ln(2)) < 0 \end{cases}.$$
On a donc $g(1) < \underbrace{g(\alpha)}_{=0} < g(3)$ et donc par croissance de g sur $]0;+\infty[$ on a bien $\boxed{1 < \alpha < 3}$.

Partie II: valeur approchée de α par la méthode du point fixe

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

3. On montre par récurrence que la propriété $\mathscr{P}_n$: "u_n existe et $u_n \geqslant 1$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
.Initialisation : $u_0 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
.Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
• par **H.R.** u_n existe et $u_n \geqslant 1$, donc u_n est dans le domaine de définition de f donc $f(u_n)$ est bien défini et donc u_{n+1} existe.
• par **H.R.** u_n existe et $u_n \geqslant 1$, donc par croissance de f on a $f(u_n) \geqslant f(1)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1 + \ln(2) > 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant 1$.
.Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 1}$.
4. On a vu que $\forall x \in [-1;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$. On a donc pour $x \geqslant 1$, $x+1 \geqslant 2$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Ceci entraine bien que : $\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}}$.
5. Nous sommes dans les conditions d'application de l'**Inégalité des accroissements finis**
$$\forall a, b \in [1;+\infty[, \quad |f(a) - f(b)| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|.$$
On sait d'après la question 4. que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1$ et d'après la question 2.(c) que $\alpha \in]1;3[/$
On peut donc choisir $a = u_n$ et $b = \alpha$ et on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|} \quad \text{puisque } f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(\alpha) = \alpha.$$
6. Une simple récurrence à partir du résultat précédent permet d'établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
7. D'après le résultat précédent on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et donc encadrement de limites (ou théorème des gendarmes) nous obtenons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et donc que $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \alpha}$.
8.

```python
import numpy as np

def approx_alpha(eps):
  u=1
  n=0
  while (1/2)**n>=eps:
    u=1+np.log(1+u)
    n= n+1
  return u,n
```

PROBLEME

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

1. On a $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ et $\forall k \in \{2, 3, 4\} \quad P(X_1 = k) = \dfrac{1}{3}$ par équiprobabilité des déplacements.
   X_1 suit une loi uniforme sur $\{2, 3, 4\}$, on a donc $E(X_1) = 3$ (milieu de $\{2, 3, 4\}$).
2. A priori, tous les points sont possibles à atteindre en n déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). Prouvons rigoureusement par récurrence que $(H_n) \quad X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ pour $n \geq 2$.
   • Pour $n = 2$, d'après le résultat admis, on a $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. Donc (H_2) est vrai.
   • Supposons (H_n) vrai, en n déplacements on peut donc être en $i \quad (i \in \{1, 2, 3, 4\})$, au n-ième déplacement, on sera alors en $j \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$. En envisageant deux valeurs distinctes de i, on obtient toutes les valeurs possibles dans $\{1, 2, 3, 4\}$. Donc (H_{n+1}) est vrai.
   Ce qui assure que (H_n) est vrai pour tout $n \geq 2$
   $\boxed{\forall n \geq 2 \quad X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}}$
3. (a) Pour $n \geq 2$, d'après la question précédente on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in 1,4}$.
   La formule des probabilités totales donne :
   $P(X_{n+1} = 1) = \sum_{i=1}^{4} P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = 1) P(X_n = i)$
   Or $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{1}{3}$ si $i \neq 1$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   (b) Pour $n = 0$, $P(X_1 = 1) = 0$ et $\dfrac{1}{3}(P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)) = \dfrac{1}{3}(0 + 0 = 0) = 0$, donc la relation est encore vraie.
   Pour $n = 1$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$
   La relation est donc encore vraie pour $n = 1$.
   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ car $(X_n = i)_{i \in 1,4}$ est un système complet d'événements.
   C'est vrai aussi pour $n = 0$ car $P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4) = 1 + 0 + 0 + 0$ et pour $n = 1$ car $P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4) = 0 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}$.

   En remplaçant $P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 1)$ dans la relation trouvée à la question 3.(a) on a :
   $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{3}(1 - P(X_n = 1)) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} P(X_n = 1)$ ce qui est la relation cherchée.
   (d) Posons $v_n = P(X_n = 1)$. Alors $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1) \ v_{n+1} = -\dfrac{1}{3} v_n + \dfrac{1}{3}$
   C'est une suite arithmético géométrique. Cherchons le point fixe α tel que $\alpha = -\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{4}$
   On sait alors que la suite $(v_n - \alpha)_n$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ donc
   $v_n - \alpha = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n (v_0 - \alpha) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
   On a bien : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.
4. (a) Pour $n \geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in 1,4}$.
   La formule des probabilités totales donne :
   $P(X_{n+1} = 2) = \sum_{i=1}^{4} P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = 2) P(X_n = i)$
   Or $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{1}{3}$ si $i \neq 2$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   Pour $n = 0$, $P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}(P(X_0 = 1) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)) = \dfrac{1}{3}(1 + 0 = 0) = 0$, donc la relation est encore vraie.
   Pour $n = 1$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{2}{9}$ et $\dfrac{1}{3}(P(X_1 = 1) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{9}$
   La relation est donc encore vraie pour $n = 1$.En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   (b) $P(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{3}(1 - P(X_n = 2)) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} P(X_n = 2)$.

   (c) Posons $w_n = P(X_n = 2)$. De même (w_n) est une suite arithmético géométrique. On a le même point fixe que pour v_n : $\alpha = \dfrac{1}{4}$
   Après calculs on a bien : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P(X_{n+1}=3) = -\frac{1}{3}P(X_n=3)+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1}=4) = -\frac{1}{3}P(X_n=4)+\frac{1}{3}$$

Les suites définies par $P(X_n = 3)$ et $P(X_n = 4)$ ont la même relation de récurrence que $P(X_n = 2)$ et la même valeur initiale 0. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N} P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = P(X_n = 2)$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n=3) = P(X_n=4) = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. $E(X_n) = P(X_n=1)+2P(X_n=2)+3P(X_n=3)+4P(X_n=4) = \frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{3}{4}-\frac{4}{4}\right)$

$E(X_n) = \frac{10}{4}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On peut vérifier : avec $n = 0$ on obtient bien $E(X_0) = 1$, avec $n = 1$, on obtient bien $E(X_1) = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 3$

$$\boxed{\forall n \in N \qquad E(X_n) = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

7. (a) On utilise les 4 égalités obtenues en I 3) a, 4) a , que l'on peut réécrire également pour $i = 3$ et $i = 4$.

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}(0.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)) \\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}(1.P(X_n=1)+0.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)) \\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}(1.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+0.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)) \\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}(1.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+0.P(X_n=4)) \end{cases}$$

Donc $AU_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \\ P(X_n=4) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_{n+1}$

On a bien : $\quad U_{n+1} = AU_n$

(b) Posons $(H_n) \quad U_n = A^n U_0$ pour$n \in \mathbb{N}$.
• Pour $n = 0$, $A^0 = I_4$ et $A^n U_0 = U_0$ donc (H_0) est vrai.
• Supposons (H_n) vérifié pour $n \in \mathbb{N}$.
$U_{n+1} = AU_n = A\times(A^n U_0) = (A^n \times A)U_0 = A^{n+1}U_0$
Donc (H_{n+1}) est vrai.
Donc (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Le mobile est au sommet 1 à l'instant initial donc $U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0=1) \\ P(X_0=2) \\ P(X_0=3) \\ P(X_0=4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or si $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, le produit $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne la première colonne de la matrice M.

Donc la première colonne de la matrice A^n est $A^n U_0$, c'est à dire U_n.

Or on a vu que $A^n U_0 = U_n$ donc la première colonne de A^n est U_n, c'est à dire : $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

8. En multipliant à droite une matrice M par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient la deuxième colonne de M.

Donc en choisissant comme position initiale au départ $X_0 = 2$, et en recommençant la même méthode probabiliste, on obtiendrait la deuxième colonne de A^n. Avec $X_0 = 3$, on obtiendrait la 3-ième colonne, et $X_0 = 4$, la 4-ième colonne.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

9. $aI+bJ=\begin{pmatrix} a+b & b & b & b & \\ b & a+b & b & b & b \\ b & b & a+b & b & \\ b & b & b & a+b & \end{pmatrix}$

Donc $aI+bJ=A \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b &= 0 \\ b &= \dfrac{1}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{a=-\dfrac{1}{3} \text{ et } b=\dfrac{1}{3}}.$

10. (a) $J^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}=4J.$

Posons $(G_k)\quad J^k=4^{k-1}J.$

• Pour $k=1$, (G_1) est vrai de façon évidente.

• Supposons (G_k) vrai pour $k\geq 1$, alors $J^{k+1}=J\times J^k=J\times\left(4^{k-1}J\right)=4^{k-1}J^2=4^kJ$

Donc (G_{k+1}) est vrai.

Donc (G_k) est vrai pour tout $k\geq 1$.

(b) I et J commutent donc d'après la formule du binôme de Newton on a :

$$A^n=\left(\frac{1}{3}(J-I)\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(J-I)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(-I)^{n-k}.$$

$$A^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left((-1)^nI+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1}\right)J\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^k=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^k-(-1)^n\right)$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1}=\frac{1}{4}\left(3^n-(-1)^n\right)$$

On a donc : $\quad A^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\left((-1)^nI+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\times\dfrac{1}{4}\left(3^n-(-1)^n\right)\right)J$

$$\boxed{A^n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n I+\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)J}.$$

(c) Pour $n=0$, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n I+\dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)J=I+\dfrac{1}{4}(1-1)J=I$

$\boxed{\text{La formule est valable pour } n=0}.$

Partie 4 : informatique

11. (a) La fonction Python prend en argument un sommet du carré et simule un saut du mobile sur l'un des 3 autres sommets.

(b)

```python
import numpy as np

def retours(n):
    L= []
    nbre=0
    x=1
    for _ in range(n):
        x=saut(x)
        L.append(x)
        if x==1:
            nbre=nbre+1
    return L,nbre
```

(c) Comment répondre à cela ?

Dans un premier temps, on peut constater que le nombre de passages en 1 est toujours proche de 25, c'est à dire $\dfrac{n}{4}$. Or la probabilité d'être en 1 se rapproche de $\dfrac{1}{4}$, comme le montre la formule du I 3) d. Les résultats affichés semblent logiques.