ECG2 - 2023-2024

DS N°2

MATHÉMATIQUES KHÛBES

(4H)

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
. les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
. les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1

On rappelle que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle trace de M le réel noté $\operatorname{tr}(M)$ défini par :

$$\operatorname{tr}(M) = a + d.$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \operatorname{tr}(M)\, J$$

1. (a) Montrer que l'application $\operatorname{tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array} \right.$ est linéaire.

   (b) Déterminer une base du noyau de l'application tr et vérifier : $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question uniquement, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathscr{B}$.

   (b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

   (c) En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

   (d) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4. On revient au cas général où J désigne une matrice non nulle quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que 1 est une valeur propre de f et préciser la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Justifier que J est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.

   (c) i. On considère dans cette sous-question le cas où $\operatorname{tr}(J) \neq 0$.
   Montrer que f est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

   ii. On considère dans cette sous-question le cas où $\operatorname{tr}(J) = 0$.
   On suppose qu'il existe une valeur propre λ de f différente de 1 et on note M un vecteur propre associé. Montrer : $\operatorname{tr}(M) = 0$.
   Aboutir à une contradiction.

   iii. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{tr}(J)$ pour que f soit diagonalisable.

   (d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{tr}(J)$ pour que f soit bijectif.

EXERCICE 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

   (c) Démontrer que : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} h(x) g(x)$.

   (d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Démontrer que :

$$g(x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x)$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.

5. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 =`u0`.

6. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

   (b) Montrer que : $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Problème

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a\,\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Montrer que la variable aléatoire $bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

   (b) En déduire une fonction d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

   (c) On considère la fonction `Python` ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```python
import numpy as np

def mystere(a,b):
    L= []
    for p in range(2,7):
        S=0
        for k in range(10**p) :
            S=S+pareto(a,b)
        L.append(S/10**p)
    return L
```

   (d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
-->  mystere(2,1)
 ans  =
    1.9306917   1.9411352   1.9840089   1.9977684   2.0012415
-->  mystere(3,2)
 ans  =
    3.1050951   3.0142956   2.9849407   2.9931656   2.9991517
-->  mystere(1,4)
 ans  =
    21.053151   249.58609   51.230522   137.64549   40.243918
```

4. (a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

   (b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher Ã déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit :

$$Y_n \;=\; \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

5. (a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $P(Y_n > x)$.

   (b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

   (c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n$ est un estimateur sans biais de b.

   Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

6. (a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

   (b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel Ã préciser.
   Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche Ã construire un intervalle de confiance pour a.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
   Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de W_n.

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n \;=\; \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a\, M_n - 1)$$

   (a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   (b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}\, M_n} \,;\, \dfrac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}\, M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
   On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0{,}975$*, où* Φ *désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*