ECG2 - 2023-2024

DS N°2

CORRECTION KHÛBES

(4H)

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
. les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
. les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1

1. (a) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
La trace de la matrice

$$\alpha M + \beta M' = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$$

est égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\alpha M + \beta M') &= \alpha a + \beta a' + \alpha d + \beta d' \\ &= \alpha(a+d) + \beta(a'+d') \\ &= \alpha \mathrm{tr}(M) + \beta \mathrm{tr}(M'). \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

(b) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \mathrm{Ker(tr)} \iff a + d = 0 \iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formant par ailleurs clairement une famille libre, elles donnent une base du noyau de tr.
Ce noyau est donc de dimension 3.

2. Soient $M, M' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En utilisant la linéarité de la trace :

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta M') &= \alpha M + \beta M' + \mathrm{tr}\left(\alpha M + \beta M'\right) J \\ &= \alpha M + \beta M' + \left(\alpha \mathrm{tr}(M) + \beta \mathrm{tr}\left(M'\right)\right) J \\ &= \alpha M + \alpha \mathrm{tr}(M) J + \beta M' + \beta \mathrm{tr}\left(M'\right) J \\ &= \alpha\left(M + \alpha \mathrm{tr}(M) J\right) + \beta\left(M' + \mathrm{tr}\left(M'\right) J\right) \\ &= \alpha f(M) + \beta f\left(M'\right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application f est linéaire. Il s'agit de plus d'une application de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. (a) Il est commode pour cette question de nommer les matrices de la base $\mathscr{B}$; posons :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note tout d'abord que $J = 2E_2 + E_3$.
On calcule et on écrit dans la base $\mathscr{B}$ les images de chacune de ses matrices par f :

$$\begin{aligned} f(E_1) &= E_1 + \mathrm{tr}(E_1) J = E_1 + J = E_1 + 2E_2 + E_3 \\ f(E_2) &= E_2 + \mathrm{tr}(E_2) J = E_2 + 0J = E_2 \\ f(E_3) &= E_3 + \mathrm{tr}(E_3) J = E_3 + 0J = E_3 \\ f(E_4) &= E_4 + \mathrm{tr}(E_4) J = E_4 + J = 2E_2 + E_3 + E_4 \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On calcule:

$$A-I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad ; \quad (A-I_4)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0.$$

(c) La matrice A est donc annulée par le polynôme $(X-1)^2\in\mathbb{R}[X]$ qui admet 1 comme unique racine. Par le cours, les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme :

$$\mathrm{Sp}(A)\subset\{1\}.$$

Il reste à savoir si 1 est valeur propre de A et si A est diagonalisable.
Proposons deux méthodes :

- Première méthode.

  On résout le système d'équations correspondant à $AX=X$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$:

  $$AX=X\iff\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&x\\2x+y+2t&=&y\\x+z+t&=&z\\t&=&t\end{array}\right.$$
  $$\iff x+t=0$$

  Ce système admet des solutions non nulles, ce qui prouve que 1 est valeur propre de A.
  L'espace propre associé est de dimension 3. La matrice A n'est donc pas diagonalisable puisque :

  $$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\dim\mathrm{E}_\lambda(A)=3<4.$$

- Deuxième méthode.
  Comme $f(E_2)=E_2$, 1 est valeur propre de f (et E_2 est un vecteur propre associé) et donc aussi de A :

  $$\mathrm{Sp}(A)=\{1\}.$$

  Si A était diagonalisable, alors on pourrait écrire $P^{-1}AP=D$ où $P\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est une matrice inversible et $D\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux tous égaux à l'unique valeur propre de A, 1, donc $D=I_4$. On aurait alors : $P^{-1}AP=I_4$ d'où $A=PI_4P^{-1}=I_4$ ce qui est absurde.
  La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Si l'énoncé avait demandé d'expliciter l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, alors seule la première méthode aurait permis de répondre complètement à la question. On a :

4. (a) Toute matrice $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle vérifie $f(M)=M$.
Donc 1 est valeur propre de f avec un espace propre contenant Ker(tr).
D'après la question 1.b., le noyau de la trace de f est de dimension 3 :

$$\underbrace{\mathrm{Ker(tr)}}_{\dim=3}\subset\mathrm{E}_1(f)\subset\underbrace{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}_{\dim=4}.$$

Ceci donne l'encadrement :

$$3\leqslant\dim\mathrm{E}_1(f)\leqslant4$$

et il y a donc a priori deux possibilités pour la dimension de $\mathrm{E}_1(f)$:

- $\dim\mathrm{E}_1(f)=3$: dans ce cas, l'inclusion $\mathrm{Ker(tr)}\subset\mathrm{E}_1(f)$ est en fait une égalité ;
- $\dim\mathrm{E}_1(f)=4$: dans ce cas, l'inclusion $\mathrm{E}_1(f)\subset\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est en fait une égalité, ce qui signifie que f est égale à l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi par exemple, $f(E_1)=E_1+\mathrm{tr}(E_1)J=E_1+J$ et $f(E_1)=E_1$, donc $J=0$ ce qui contredit l'énoncé.

Par conséquent, on est dans le premier cas :

$$\mathrm{E}_1(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \quad \text{et donc} \quad \dim \mathrm{E}_1(f) = 3.$$

(b) On calcule l'image de J par f:

$$f(J) = J + \mathrm{tr}(J)J = \big(1 + \mathrm{tr}(J)\big)J$$

donc J est vecteur propre de f associé à la valeur propre $1 + \mathrm{tr}(J)$.

Si $\mathrm{tr}(J) = 0$, c'est la valeur propre 1 ; sinon, c'est une deuxième valeur propre.
Il faut bien avoir compris ceci pour les questions suivantes.

(c) i. En supposant que $\mathrm{tr}(J) \neq 0$, nous avons donc trouvé deux valeurs propres distinctes pour f : 1 et $1 + \mathrm{tr}(J)$.

Par ailleurs, $\dim \mathrm{E}_1(f) = 3$ d'après 4.a.
Or, par le cours :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f) \leqslant 4$$

avec égalité si et seulement si f est diagonalisable.
Cette somme comporte les deux termes $\dim \mathrm{E}_1(f)$ $(= 3)$ et $\dim \mathrm{E}_{1+\mathrm{tr}(J)}(f)$ $(\geqslant 1)$, ce qui prouve qu'il n'y a pas d'autre valeur propre et qu'il y a égalité partout :

$$\underbrace{\dim \mathrm{E}_1(f)}_{=3} + \underbrace{\dim \mathrm{E}_{1+\mathrm{tr}(J)}(f)}_{=1} = 4.$$

En résumé :

- f est diagonalisable,
- $\mathrm{Sp}(f) = \{1,\ 1 + \mathrm{tr}(J)\}$,
- $\mathrm{E}_1(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ en est une base d'après 1.b.,
- $\mathrm{E}_{1+\mathrm{tr}(J)}(f)$ est de dimension 1 et contient la matrice non nulle J qui en forme donc une base.

ii. On suppose que $\mathrm{tr}(J) = 0$, que f admet une valeur propre λ différente de 1 et que M est un vecteur propre associé. Alors :

$$f(M) = M + \mathrm{tr}(M)J = \lambda M.$$

Appliquons la trace à cette dernière égalité :

$$\mathrm{tr}\big(M + \mathrm{tr}(M)J\big) = \mathrm{tr}(\lambda M).$$

La trace étant linéaire d'après 1.a. :

$$\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(M)\underbrace{\mathrm{tr}(J)}_{=0} = \lambda \mathrm{tr}(M)$$

et donc :

$$(1-\lambda)\mathrm{tr}(M) = 0.$$

Comme $\lambda \neq 1$, on en déduit : $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Par conséquent $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{E}_1(f)$, ce qui est absurde car un vecteur propre ne peut être associé qu'à une seule valeur propre, résultat que l'on peut réexpliquer ici :

$$\left.\begin{aligned} f(M) &= M \\ f(M) &= \lambda M \end{aligned}\right\} \quad \text{donc} \quad M = \lambda M \quad \text{et donc} \quad \underbrace{\overbrace{(1-\lambda)}^{\neq 0}\ \overbrace{M}^{\neq 0\ \star} = 0}_{\text{absurde}}$$

(* un vecteur propre est non nul par définition).

En conclusion, si $\mathrm{tr}(J) = 0$, alors il n'existe pas d'autre valeur propre que 1 :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{1\}.$$

Une autre solution, plus simple, mais qui ne correspondait pas à la manière dont est décomposée la question (notons id l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) : $\forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad (f - \mathrm{id})(N) = \mathrm{tr}(N)J(\mathrm{N}estquelconq$

est un polynôme annulateur de f, ce qui prouve que f n'admet pas d'autre valeur propre que 1.

iii. D'après la question précédente, si $\mathrm{tr}(J) = 0$, alors f admet une unique valeur propre (1) avec un sous-espace propre de dimension 3 (d'après 4.a.), donc f n'est pas diagonalisable.
Si au contraire $\mathrm{tr}(J) \neq 0$, alors f est diagonalisable d'après 4.a.i.
En conclusion :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{tr}(J) \neq 0.$$

(d) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement s'il n'admet pas 0 comme valeur propre.
Comme $1 + \mathrm{tr}(J)$ est la seule valeur propre de f éventuellement différente de 1 :

$$f \text{ est bijective} \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff 1 + \mathrm{tr}(J) \neq 0 \iff \mathrm{tr}(J) \neq -1.$$

EXERCICE 2

Pour tout réel $x>0$, on pose $g(x)=\exp\left(\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.

Partie I - Étude de la fonction g

1. Par calcul des limites,
$$\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}+\infty$$
puis par composition avec l'exponentielle, on a donc
$$\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$$
De même,
$$\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
et il suit que
$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$h(x)=\ln(x)+2x-1.$$

   (a) La fonction h est somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle-même dérivable et, pour tout $x>0$, on a
$$h'(x)=\frac{1}{x}+2>0$$
ce qui permet d'affirmer que h est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]\lim_{x\to 0} h(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} h(x)[=\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par h, noté α sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Comme de plus, $h(1)=1>0=h(\alpha)$ et $h(1/2)=\ln(1/2)=-\ln(2)<0$, la stricte croissante de h (et donc de sa bijection réciproque) permet d'affirmer que "les antécédents sont rangés dans le même sens" c'est à dire que
$$\frac{1}{2}<\alpha<1.$$

   (c) La fonction g est la composée, par une exponentielle, d'un produit de combinaison de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est encore dérivable sur ce même intervalle. Comme on a
$$\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)'=\frac{1}{x^2}\ln(x)+\left(2-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{\ln(x)+2x-1}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2},$$
on a bien
$$g'(x)=\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)'\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)=\frac{h(x)}{x^2}g(x).$$

   (d) La question (2) nous donne le tableau de signes de $h(x)$, ce qui permet d'obtenir facilement celui de $g'(x)$ puis les variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Par définition de l'exponentielle, pour $x > 0$,
$$g(x) = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$
Or, par croissance comparée, $\ln(x)/x \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. On peut donc utiliser le développement limite de $\exp(u)$ en 0 à l'ordre 1 pour écrire
$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 + -\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \qquad x \longrightarrow +\infty.$$
Ceci donne ensuite
$$g(x) = x^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 - x\ln(x) + o(x\ln(x)), \qquad x \longrightarrow +\infty$$
ou encore
$$g(x) - x^2 = -x\ln(x) + o(x\ln(x))$$
ce qui est équivalent à écrire
$$g(x) - x^2 \sim -x\ln(x), \qquad x \longrightarrow +\infty.$$

Partie II - Étude d'une suite récurrence

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

4. Comme demandé, on procède par récurrence.

   - initialisation. Pour $n = 0$, u_0 est donné et par hypothèse est strictement positif.

   - hérédité. Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et soit strictement positif. En particulier u_n est dans le domaine de définition de g et $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. De plus,
   $$u_{n+1} = \exp\left(\left(2-\frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) > 0$$
   (une exponentielle est toujours strictement positive), ce qui termine cette récurrence facile.

5. C'est un programme classique qui utilise une boucle `for`.

```
def suite(u0, n):
  U=np.zeros((n+1,1)) # on pre-remplit une liste de bonne
                      # longueur avec des zeros
  U[1]= u0 # premier terme
  for k in range(2,n+2):
    U[k] = np.exp((2-1/U[k-1])*log(U[k-1]))
  return U
```

6. (a) On reproduit directement le tableau de signe répondant à cette question triviale. Notant $A(x) = (x-1)\ln(x)$ on a

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$A(x)$	‖	$+$	0	$+$	

En particulier, pour tout $x > 0$, on a $(x-1)\ln(x) \geqslant 0$.

(b) Soit $x > 0$. On peut écrire

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right).$$

Or, $(x-1)\ln(x)/x \geqslant 0$ pour $x > 0$. Par composition avec l'exponentielle croissante, on a bien que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} \geqslant 1.$$

La question précédente donne bien que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$. L'égalité n'est vérifiée que lorsque $g(x)/x = 1$ c'est à dire lorsque

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

7. La question précédente, appliquée avec $x = u_n > 0$ permet de voir que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geqslant u_n$$

et donc que la suite (u_n) est toujours croissante.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

(a) On procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse donnée par le texte.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leqslant u_n \leqslant 1$. Attention, g n'est pas croissante sur tout l'intervalle (seulement entre α et 1 !). On fait une disjonction de cas.
  - Si $\alpha \leqslant u_n \leqslant 1$, alors, par croissance de g sur cet intervalle, on a

$$u_{n+1} = g(u_n) \leqslant g(1) = 1$$

  - Si $1/2 \leqslant u_n < \alpha$, alors par décroissance de g,

$$u_{n+1} = g(u_n) \leqslant g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

  Dans les deux cas, on a bien $u_{n+1} \leqslant 1$. Comme de plus (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 1/2$ dans tous les cas. La récurrence est terminée.

☞ On aurait aussi pu commencer par montrer la stabilité de l'intervalle $[1/2;1]$ par g ce qui rendait la récurrence triviale.

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1). Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite ℓ élément de $[1/2;1]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et par continuité de g sur $[1/2;1]$ (et donc en ℓ), on déduit que ℓ vérifie la relation $\ell = g(\ell)$ ce qui impose d'après une question précédente que $\ell = 1$. Ainsi,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

9. **Dans cette question uniquement,** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Une récurrence immédiate avec la croissance de la suite permet de voir que $u_{n+1} \geqslant u_n > 1$ et l'hérédité est triviale. On s'en contente (c'est long).

(b) Si la suite (u_n) était majorée, elle convergerait par le théorème de convergence monotone vers une limite ℓ qui vérifierait $\ell \geqslant u_0 > 1$ et (par le même argument de passage à la limite et de continuité que précédemment) $\ell = g(\ell)$. Or la seule solution possible est $\ell = 1$ et c'est contradictoire avec $\ell > 1$ donc la suite (u_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

10. **Dans cette question uniquement,** on suppose que $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.

Dans ce cas, on voit (par stricte décroissance de g) que $u_1 = g(u_0) > g(1/2) = 1$. Et donc tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1 à partir du deuxième... On applique le résultat de la question précédente, la suite diverge vers $+\infty$.

Problème

Dans cet exercice, toutes les variables alÃ©atoires sont supposÃ©es dÃ©finies sur un mÃªme espace probabilisÃ© notÃ© (Ω,

[,

).

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux rÃ©els strictement positifs. On dÃ©finit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \left\{ 0 \quad six\text{>b}[-.2cm]\, a\, \frac{b^a}{x^{a+1}} \right.$$

1.

Montrer que f est une densitÃ© de probabilitÃ©.

Proof.

La fonction f est continue :

sur $]-\infty, b[$ en tant que fonction constante,

sur $]b, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto x^{a+1}$ qui : -

est continue sur $]b, +\infty[$,

`NE S'ANNULE PAS` sur $]b, +\infty[$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf Ã©ventuellement en b.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se prÃ©sentent :

si $x \in]-\infty, b[$, alors : $f(x) = 0 \geqslant 0$.

si $x \in [b, +\infty[$, alors, comme $a > 0$ et $b > 0$: $f(x) = a\,\dfrac{b^a}{x^{a+1}} \geqslant 0$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

DÃ©montrons que l'intÃ©grale $\displaystyle\int -\infty{+}\infty f(x)$ converge et vaut 1.

Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int -\infty{+}\infty f(x) \;=\; \int b{+}\infty f(x)$$

La fonction f est continue par morceaux sur $[b, +\infty[$. L'intÃ©grale $\displaystyle\int b{+}\infty f(x)$ est donc seulement impropre en $+\infty$.

Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\int bBf(x) \;=\; \int bBa\,\frac{b^a}{x^{a+1}} \;=\; a\,b^a \int bBx^{-a-1}$$

$$=\; a\,b^a\,\frac{x^{-a}}{-a}bB \;=\; -b^a\,\frac{1}{x^a}bB \qquad (cara \neq 0)\ \text{[-.2cm]} \;=$$

$$-b^a\left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a}\right)$$

Or, comme $a > 0$: $B \longrightarrow +\infty \frac{1}{B^a} = 0$. D'oÃ¹ :

$$B \longrightarrow +\infty - b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a} \right) = -b^a \left(0 - \frac{1}{b^a} \right) = 1$$

Ainsi, l'intÃ©grale $\int -\infty + \infty f(t)$ est convergente et vaut 1. Finalement la fonction f est une densitÃ© de probabilitÃ©. □
On dit qu'une variable alÃ©atoire suit la loi de Pareto de paramÃštres a et b lorsqu'elle admet pour densitÃ© la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considÃšre une variable alÃ©atoire X suivant la loi de Pareto de paramÃštres a et b. 1.

DÃ©terminer la fonction de rÃ©partition de X.

Proof.

Dans la suite, on considÃšre : $X(\Omega) = [b, +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se prÃ©sentent :

si $x \in]-\infty, b[$, alors : $X \leqslant x = \emptyset$ (car $X(\Omega) = [b, +\infty[$). D'oÃ¹ :

$$F_X(x) = (X \leqslant x) = (\emptyset) = 0$$

si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= (X \leqslant x) \\ &= \int -\infty x f(t) \\ &= \int b x f(t) \qquad (car f est nulle en dehors de [b,+\infty[) \text{ [-.2cm]} = \int b x a \frac{b^a}{t^{a+1}} \\ &= a b^a \int b x t^{-a-1} \\ &= \cancel{a} b^a \frac{t^{-a}}{-\cancel{a}} b x \qquad (car a \neq 0) \text{ [-.2cm]} = -b^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{b^a} \right) = 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a \end{aligned}$$

Finalement : $F_X : x \mapsto \left\{ 0 \quad si x < b[-.2cm] 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a \right.$

.98Profitons de cette question pour faire une remarque sur la notation $X(\Omega)$.

Rappelons qu'une X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggÃšre, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

Il faut bien noter que dans cette dÃ©finition aucune application probabilitÃ© n'apparaÃ®t.

Il est toujours correct d'Ã©crire : $X(\Omega) \subseteq \,]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriÃ©tÃ© signifie que toute X est Ã valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par dÃ©finition de la notion de variable alÃ©atoire rÃ©elle.

Dans le cas des discrÃštes, il est d'usage relativement courant de confondre :

l'ensemble de valeurs possibles de la X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),

l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \left(X = x\right) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilitÃ© non nulle. Dans le cas qui nous intÃ©resse ici, Ã savoir X est une discrÃšte, cet ensemble est appelÃ© support de X et est notÃ© (X).

Dans le cas des Ã densitÃ©, la dÃ©termination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des Ã©tudiÃ©es sera prÃ©cisÃ© ("On considÃšre une Ã valeurs strictement positives"). Si ce n'est pas le cas :

si X suit une loi usuelle, on peut se rÃ©fÃ©rer Ã l'ensemble image donnÃ© en cours. Par exemple, si $X01$, on se permet d'Ã©crire :

"Comme $X01$, on **considÃšre** : $X(\Omega) = [0,1]$."

si X ne suit pas une loi usuelle, on Ã©tudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
On se permet alors d'Ã©crire :

"Dans la suite, on **considÃšre** : $X(\Omega) = I$."

En **dÃ©crÃ©tant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on dÃ©cide d'ajouter une hypothÃšse qui ne fait pas partie de l'Ã©noncÃ©. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines dÃ©monstrations (l'ensemble image Ã©tant connu, on se rappelle que la fonction de rÃ©partition, par exemple, s'obtient Ã l'aide d'une dsijonction de cas). ☐

a)
Soit U une variable alÃ©atoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Montrer que la variable alÃ©atoire $bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramÃštres a et b.
Proof.

Notons $h : x \mapsto bx^{-\frac{1}{a}}$, de sorte que $Y = bU^{-\frac{1}{a}} = h(U)$.

On **considÃšre** : $U(\Omega) =]0,1]$. On en dÃ©duit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) \ = \ h\big(U(\Omega)\big) \\ &= h(]0,1]) \\ &= [h(1), x \longrightarrow 0 h(x)[\qquad (car, comme \text{a>0} et \text{b>0}, la fonction \text{h} est continue et strictement d\text{Ã}l'croissante \end{aligned}$$
$[b, +\infty[$

Ainsi : $Y(\Omega) = [b, +\infty[$.

.95 Rappelons que la $Y = h(U)$ est par dÃ©finition l'application :

$$\begin{array}{rccc} Y = h(U): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & h\big(U(\omega)\big) \end{array}$$

Comme la fonction h est dÃ©finie uniquement sur $]0,+\infty[$, la $Y = h(U)$ est bien dÃ©finie seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) \subset]0,+\infty[$$

Autrement dit, il est primordial, pour la bonne dÃ©finition de l'objet $Y = h(U)$, de considÃ©rer que U est Ã valeurs dans $]0,1] \subset]0,+\infty[$ (et non $[0,1[\not\subset]0,+\infty[$ comme pouvait le suggÃ©rer l'Ã©noncÃ©).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se prÃ©sentent :

si $x \in]-\infty, b[$, alors : $Y \leqslant x = \emptyset$ (car $Y(\Omega) = [b,+\infty[$). D'oÃ¹ :

$$F_Y(x) \ = \ (Y \leqslant x) \ = \ (\emptyset) \ = \ 0$$

si $x \in [b,+\infty[$, alors :

$$F_Y(x) \quad = \quad (Y \leqslant x)$$
$$= \quad \left(bU^{-\frac{1}{a}} \leqslant x\right)$$
$$= \quad \left(U^{-\frac{1}{a}} \leqslant \frac{x}{b}\right) \qquad (car\text{b>0})[-.2cm] \quad =$$
$$\left(U \geqslant \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) \quad (parstrictedÃl'croissancedela$$
$$= \quad 1 - F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \qquad (car\text{U}estuneÃ\ densitÃl')$$

Or :

$$x \geqslant b$$
$$donc \quad \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{b} \quad \frac{b}{x} \leqslant 1 \quad (car\text{b >0})[-.2cm]ainsi$$
$$\left(\frac{b}{x}\right)^a \leqslant 1$$

Comme $a > 0$, $b < 0$ et $x > 0$, on en dÃ©duit : $0 < \left(\frac{b}{x}\right)^a \leqslant 1$.

De plus, comme $U\mathscr{U}(]0,1])$: $F_U : u \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} 0 & si\text{u} \leqslant 0 \text{ [-.2cm] u} \\ si\text{u} > 1 & \end{array} \right.$.

Ainsi : $F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right) = \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$. Finalement : $F_Y : x \mapsto \left\{ \ 0 \quad si\text{x} < \text{b}[-.2cm]1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \right.$.

D'aprÃšs la question 2., on reconnaÃ®t la fonction de rÃ©partition F_X de X qui suit la loi de Pareto de paramÃštres a et b.
Or la fonction de rÃ©partition caractÃ©rise la loi d'une . On en dÃ©duit que Y suit la loi de Pareto de paramÃštres a et b. .99

On a dÃ©montrÃ©, lors de l'Ã©tude de $Y(\Omega)$, que h rÃ©alise une bijection de $]0,1]$ sur $[b,+\infty[$. Il est possible de dÃ©terminer l'expression de $h^{-1} : [b,+\infty[\longrightarrow]0,1]$.
Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in]0,1]$ et $y \in [b,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} y = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = b\,x^{-\frac{1}{a}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{b}{y}\right)^a \\ &\Leftrightarrow \quad x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$

On dÃ©montre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$.

On retrouve ici l'expression de la quantitÃ© $\left(\dfrac{b}{x}\right)^a$ apparaissant Ã la fin de la rÃ©solution de la question. Ce n'est pas surprenant car la mÃ©thode utilisÃ©e ici consiste justement Ã faire apparaÃ®tre, Ã©tape par Ã©tape, la quantitÃ© $h^{-1}(x)$. Plus prÃ©cisÃ©ment, on a :

$$F_Y(x) \ = \ \big(Y \leqslant x\big) \ = \ \big(h(U) \leqslant x\big) \ = \ \big(U \leqslant h^{-1}(x)\big) \ = \ F_U\big(h^{-1}(x)\big) \qquad \square$$

On comprend mieux pourquoi cette maniÃšre de procÃ©der est appelÃ©e **mÃ©thode d'inversion**.

En dÃ©duire une fonction d'en-tÃªte `function X = pareto(a, b)` qui prend en arguments deux rÃ©els a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable alÃ©atoire X.

Proof.
On propose la fonction suivante : function X = pareto(a, b) U = rand() X = b (U.(-1/a)) endfunction

DÃ©taillons les Ã©lÃ©ments de ce script.

DÃ©but de la fonction
On commence par prÃ©ciser la structure de la fonction :

cette fonction se nomme `pareto`,

elle prend en entrÃ©e 2 paramÃštres `a` et `b`,

elle admet pour variable de sortie la variable `X`. function X = pareto(a, b)

Contenu de la fonction
En ligne 2, on stocke dans la variable `U` une simulation de la U de loi $\mathcal{U}(]0,1])$. 1 U = rand() D'aprÃšs la question prÃ©cÃ©dente, la $Y = bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la mÃªme loi que la X, dÃšs lors que $U\mathcal{U}(]0,1])$.
Ainsi, en ligne 3, on stocke dans la variable `Y` une simulation de la X. 2 X = b (U.(-1/a)) On rappelle que l'opÃ©rateur . est l'opÃ©rateur de puissance terme Ã terme, contrairement Ã l'opÃ©rateur qui est l'opÃ©rateur de puissance mathÃ©matique classique. Par exemple, en notant : $A = 12$
34, on obtient :

$$A = [1,2;3,4] A.2 \quad ans = \quad 1. \quad 4. \quad 9. \quad 16. A2 \quad ans = \quad 7. \quad 10. \quad 15. \quad 22. \qquad \square$$

On considÃšre la fonction ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyÃ©e par la fonction `mystere` ? function L = mystere(a, b) L = [] for p = 2 : 6 S = 0 for k = 1 : 10p S = S + pareto(a,b) end L = [L, S / 10p] end endfunction

Proof.
DÃ©taillons les Ã©lÃ©ments de ce script.

DÃ©but de la fonction
On commence par prÃ©ciser la structure de la fonction :

cette fonction se nomme `mystere`,

elle prend en entrÃ©e 2 paramÃšstres `a` et `b`,

elle admet pour variable de sortie la variable `L`. function L = mystere(a, b) La variable de sortie `L` est ensuite initialisÃ©e Ã la matrice vide. 1 L = []

Structure itÃ©rative
CommenÃ§ons par dÃ©crire ce qu'il se passe Ã l'intÃ©rieur de cette premiÃšre structure itÃ©rative (`for p = 2 : 6`) avant de s'intÃ©resser Ã l'utilitÃ© de la variable `p`.

On commence par initialiser une variable `S` Ã `0` (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'Ã©lÃ©ment neutre de l'opÃ©rateur de sommation).

Les lignes 5 Ã 7 permettent de mettre Ã jour la variable `S` pour qu'elle contienne la somme de 10^p simulations de la X suivant la loi de Pareto de paramÃšstres `a` et `b`. Pour cela, on met de nouveau en place une structure conditionnelle (boucle for) et on utilise la fonction `pareto` dÃ©finie en question prÃ©cÃ©dente pour obtenir les simulations de la X. 4 for k = 1 : 10p S = S + pareto(a,b) end

Enfin, on met Ã jour la vecteur `L` en lui concatÃ©nant Ã droite la valeur stockÃ©e dans la variable `S / 10p`. Remarquons que, comme `S` contient la somme de 10^p simulations de la X, la variable `S / 10p` contient la moyenne des 10^p simulations de X.
Or, l'idÃ©e naturelle pour obtenir une approximation de l'espÃ©rance $\mathrm{E}(X)$ est :

de simuler un grand nombre de fois ($N = 10^p$ est ici ce grand nombre) la X.
Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond Ã l'observation d'un N-Ã©chantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la X.
(les X_i sont indÃ©pendantes et de mÃªme loi que X)

de rÃ©aliser la moyenne des rÃ©sultats de cette observation. Cette idÃ©e est justifiÃ©e par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum k = 1 N x_k \simeq \mathrm{E}(X)$$

La variable `S / 10p` est donc une approximation de $\mathrm{E}(X)$.

Sortie de la fonction

Ã la fin de la boucle `for p = 2 : 6`, la variable `L` est donc un vecteur Ã 5 coordonnÃ©es (autant que de valeurs prises par la variable `p`) contenant 5 approximations de $\mathrm{E}(X)$.

Plus prÃ©cisÃ©ment, la variable `p` prend successivement les valeurs de l'ensemble $2, 6$.
Ainsi, la variable `L` contient : -

en 1 coordonnÃ©e, une approximation de $\mathrm{E}(X)$ obtenue Ã l'aide de 10^2 simulations de X,

en 2 coordonnÃ©e, une approximation de $\mathrm{E}(X)$ obtenue Ã l'aide de 10^3 simulations de X,

$\dots$

en 5 coordonnÃ©e, une approximation de $\mathrm{E}(X)$ obtenue Ã l'aide de 10^6 simulations de X. La variable `L` est donc un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus prÃ©cises de $\mathrm{E}(X)$ oÃ¹ X suit une loi de Pareto de paramÃšstres `a` et `b`.

Afin de permettre une bonne comprÃ©hension des mÃ©canismes en jeu, on a dÃ©taillÃ© avec prÃ©cision la rÃ©ponse Ã cette question. Cependant, fournir la bonne rÃ©ponse dÃ©montre la bonne comprÃ©hension de l'algorithme et permet d'obtenir tous les points allouÃ©s Ã cette question. On procÃšdera de mÃªme dans les autres questions .

Il est Ã©tonnant que l'Ã©noncÃ© mentionne la notion de liste. Dans beaucoup de langages informatiques, on trouve la distinction entre liste et tableau. Sans trop entrer dans les dÃ©tails, ces deux objets rÃ©pondent Ã des objectifs diffÃ©rents. En gÃ©nÃ©ral, la distinction s'Ã©tablit comme suit :

un tableau est un objet dont la taille est fixÃ© Ã l'avance et ne peut varier.
L'accÃšs et la modification d'un Ã©lÃ©ment du tableau se fait de maniÃšre rapide.

une liste est un objet dont on peut faire Ã©voluer facilement la taille. GrossiÃšrement, une liste est implantÃ©e suivant la logique d'une pile d'assiettes. L'ajout se fait en dÃ©but de liste (on pose un nouvelle assiette en haut de la pile). L'accÃšs Ã un Ã©lÃ©ment de la liste requiert de passer en revue tous les Ã©lÃ©ments de la liste (on dÃ©pile les assiettes jusqu'Ã l'obtention de celle que l'on souhaite). En , il n'y a pas vraiment lieu de parler de liste. Ce langage est pensÃ© avec une faible variÃ©tÃ© de types. L'idÃ©e gÃ©nÃ©rale est la suivante : "en tout est matrice". D'ailleurs, l'objet renvoyÃ© par la fonction `mystere` est bien une matrice ligne Ã 5 Ã©lÃ©ments (on parle aussi de vecteur). L'implantation du type matriciel en ne nÃ©cessite pas que la taille de la matrice soit fixÃ©e en amont. On peut donc agir comme le propose le concepteur et ainsi copier l'idÃ©e de la liste consistant Ã ajouter des Ã©lÃ©ments au fur et Ã mesure. Mais cela ne semble pas pertinent car on connaÃ®t dÃšs le dÃ©but de la fonction la taille de l'objet renvoyÃ©. Il est donc **fortement recommandÃ©** de penser l'objet `L` plus comme un tableau dont la taille fixÃ©e initialement n'Ã©volue plus. Cela peut se faire en initialisant `L` de la maniÃšre suivante : 1 L = zeros(1, 5) Cela permet d'allouer une bonne fois pour toute l'espace mÃ©moire nÃ©cessaire Ã la dÃ©finition de l'objet `L`. On Ã©chappe ainsi au risque qu'une nouvelle allocation de mÃ©moire soit nÃ©cessaire si la taille de l'objet grandit au-delÃ de l'espace mÃ©moire allouÃ© initialement.

Les considÃ©rations dÃ©taillÃ©es dans le point prÃ©cÃ©dent ne sont pas un attendu du programme. Elles sont prÃ©sentÃ©es ici uniquement car le concepteur mentionne la notion de liste, terme non prÃ©sent dans le programme officiel.

On exÃ©cute la fonction prÃ©cÃ©dente avec diffÃ©rentes valeurs de a et de b.
Comment interprÃ©ter les rÃ©sultats obtenus ?

$mystere(2,1) \quad ans = \quad 1.9306917 \quad 1.9411352 \quad 1.9840089 \quad 1.9977684 \quad 2.0012415 mystere(3,2) \quad ans =$

Proof.

L'instruction `mystere(2,1)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus prÃ©cises de $\mathrm{E}(X)$, oÃ¹ X suit une loi de Pareto de paramÃštres 2 et 1.
Les 5 valeurs affichÃ©es semblent Ãªtre de plus en plus proche de 2. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto
de paramÃštres 2 et 1, alors : $\mathrm{E}(X) = 2$.

L'instruction `mystere(3,2)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus prÃ©cises de $\mathrm{E}(X)$, oÃ¹ X suit une loi de Pareto de paramÃštres 3 et 2.
Les 5 valeurs affichÃ©es semblent Ãªtre de plus en plus proche de 3. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto
de paramÃštres 3 et 2, alors : $\mathrm{E}(X) = 3$.

L'instruction `mystere(1,4)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus prÃ©cises de $\mathrm{E}(X)$, oÃ¹ X suit une loi de Pareto de paramÃštres 1 et 4.
Les 5 valeurs affichÃ©es ne semblent pas converger vers une valeur en particulier. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto
d) de paramÃštres 1 et 4, alors elle n'admet pas d'espÃ©rance. $\square$

Montrer que X admet une espÃ©rance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) \; = \; \frac{a\, b}{a-1}$$

Proof.

La X admet une espÃ©rance si et seulement si l'intÃ©grale $\int -\infty + \infty x\, f(x)$ est absolument convergente, ce qui

Ã©quivaut Ã dÃ©montrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\int -\infty + \infty x^r\, f(x)$.

Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int -\infty + \infty x\, f(x) \; = \; \int b + \infty x\, f(x)$$

De plus, pour tout $x \in [b, +\infty[$:

$$x\, f(x) \; = \; x\, \frac{a\, b^a}{x^{a+1}} \; = \; a\, b^a\, \frac{1}{x^a}$$

Or $\int b{+}\infty \frac{1}{x^a}$ est une intÃ©grale de Riemann, impropre en $+\infty$ $(b>0)$, d'exposant a. Elle est donc convergente si et seulement si $a>1$. On en dÃ©duit que la X admet une espÃ©rance si et seulement si $a>1$.

Supposons alors $a>1$.
Soit $B \in [b,+\infty[$.

$$\begin{aligned} \int bBx\, f(x) &= a\,b^a \int bBx^{-a} \\ &= a\,b^a\, \frac{x^{-a+1}}{-a+1} bB \qquad (cara \neq 1)\ [\text{-.2cm}] \quad = \\ -\frac{a\,b^a}{a-1}\, \frac{1}{x^{a-1}} bB & \\ &= -\frac{a\,b^a}{a-1}\left(\frac{1}{B^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}}\right) \end{aligned}$$

Comme $a-1>0$: $B \longrightarrow +\infty \frac{1}{B^{a-1}} = 0$. D'oÃ¹ :

$$\mathrm{E}(X) = -\frac{a\,b^a}{a-1}\left(0-\frac{1}{b^{a-1}}\right) = -\frac{a\,b^a}{a-1}\left(-\frac{1}{b^{a-1}}\right) = \frac{a\,\cancel{b^a}}{(a-1)\cancel{b^a}\,b^{-1}} = \frac{a\,b}{a-1}$$

On remarque qu'on trouve bien des rÃ©sultats cohÃ©rents avec les rÃ©sultats obtenus avec en question prÃ©cÃ©dente
Ainsi, si $a>1$: $\mathrm{E}(X) = \frac{a\,b}{a-1}$.
si X suit une loi de Pareto de paramÃštres 2 et 1, alors X admet une espÃ©rance et :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{2\times 1}{2-1} = 2$$

si X suit une loi de Pareto de paramÃštres 3 et 2, alors X admet une espÃ©rance et :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{3\times 2}{3-1} = 3 \qquad \square$$

Montrer que X admet une variance si et seulement si $a>2$ et que, dans ce cas :
si X suit une loi de Pareto de paramÃštres 1 et 4, alors X n'admet pas d'espÃ©rance.

$$(X) = \frac{a\,b^2}{(a-1)^2\,(a-2)}$$

Proof.

La X admet une variance si et seulement si l'intÃ©grale $\int -\infty{+}\infty x^2\, f(x)$ est absolument convergente, ce qui Ã©quivaut Ã dÃ©montrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\int -\infty{+}\infty x^r\, f(x)$.

Comme f est nulle en dehors de $[b,+\infty[$:

$$\int -\infty{+}\infty x^2\, f(x) = \int b{+}\infty x^2\, f(x)$$

De plus, pour tout $x \in [b, +\infty[$:

$$x^2 f(x) \;=\; x^2 \, \frac{a\,b^a}{x^{a+1}} \;=\; a\,b^a \, \frac{1}{x^{a-1}}$$

Or $\int b{+}\infty \frac{1}{x^{a-1}}$ est une intÃ©grale de Riemann, impropre en $+\infty$ $(b>0)$, d'exposant $a-1$. Elle est donc convergente si et seulement si $a-1>1$. On en dÃ©duit que la X admet une variance si et seulement si $a>2$.

Supposons alors $a>2$.
Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int bBx\, f(x) &= a\,b^a \int bBx^{-a+1} \\ &= a\,b^a\, \frac{x^{-a+2}}{-a+2} bB \qquad (car a \neq 2)\ [-.2cm] \quad = \\ -\frac{a\,b^a}{a-2}\, \frac{1}{x^{a-2}} bB & \\ &= -\frac{a\,b^a}{a-2} \left(\frac{1}{B^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}} \right) \end{aligned}$$

Comme $a-2>0$: $B \longrightarrow +\infty \frac{1}{B^{a-2}} = 0$. D'oÃ¹ :

$$\mathrm{E}(X^2) \;=\; -\frac{a\,b^a}{a-2} \left(0 - \frac{1}{b^{a-2}}\right) \;=\; -\frac{a\,b^a}{a-2} \left(-\frac{1}{b^{a-2}}\right) \;=\; \frac{a\,\cancel{b^a}}{(a-2)\cancel{b^a}\,b^{-2}} \;=\; \frac{a\,b^2}{a-2}$$

Ainsi, si $a>2$: $\mathrm{E}(X^2) = \dfrac{a\,b^2}{a-2}$.

Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} (X) &= \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 \\ &= \frac{a\,b^2}{a-2} - \left(\frac{a\,b}{a-1}\right)^2 \\ &= ab^2 \left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2} \right) \\ &= ab^2 \left(\frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-2)\,(a-1)^2} \right) \\ &= ab^2 \left(\frac{(\cancel{a^2} - \cancel{2a} + 1) - (\cancel{a^2} - \cancel{2a})}{(a-2)\,(a-1)^2} \right) \\ &= ab^2\, \frac{1}{(a-2)\,(a-1)^2} \end{aligned}$$

□

Ainsi, si $a>2$: $(X) = \dfrac{a\,b^2}{(a-2)\,(a-1)^2}$.

Partie B : Estimation du paramÃštre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher Ã dÃ©terminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable alÃ©atoire X admet pour densitÃ© la fonction f dÃ©finie par :

$$f : x \mapsto \left\{ 0 \quad six\text{<b}[-.2cm] \frac{3\,b^3}{x^4} \right.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables alÃ©atoires indÃ©pendantes, toutes de mÃªme loi que X.
On dÃ©finit :

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables alÃ©atoires dÃ©finies sur $(\Omega,$

$[,$ ☺

).1.

a)

Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $(Y_n > x)$.

Proof.
Soit $x \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
(Y_n > x) &= (k = 1nX_k > x) \\
&= k = 1n(X_k > x) \qquad (carles \mathrm{X}_1, \ldots, X_n \text{ sont indÃ©pendantes) [-.2cm]} = \\
k = 1n\left(1 - F_{X_k}(x)\right) \\
&= (1 - F_X(x))^n \qquad (carles \mathrm{X}_1, \ldots, X_n \text{ ont mÃªme loi que } X) \text{ [-.2cm]} = \\
\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{b}{x}\right)^3\right)\right)^n &= \qquad \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}
\end{aligned}$$

□

$\forall x \in [b, +\infty[, \ (Y_n > x) = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}$
En dÃ©duire que Y_n suit une loi de Pareto dont on prÃ©cisera les paramÃštres.

Proof.

Tout d'abord : $\forall k \in 1, n,\ X_k(\Omega) = [b, +\infty[$. Ainsi : $Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[$.

DÃ©terminons F_{Y_n}, la fonction de rÃ©partition de Y_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se prÃ©sentent :

si $x \in]-\infty, b[$, alors $Y_n \leqslant x = \emptyset$ (car $Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[$). D'oÃ¹ :

$$F_{Y_n}(x) = (Y_n \leqslant x) = (\emptyset) = 0$$

si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= (Y_n \leqslant x) \\ &= 1 - (Y_n > x) \\ &= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} \qquad (d'aprÃšslaquestionprÃľcÃľdente) \end{aligned}$$

Finalement : $F_{Y_n} : x \mapsto \left\{ 0 \quad si \text{x<b}[-.2cm] 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} \right.$.

D'aprÃšs la question 2., on reconnaÃ®t la fonction de rÃ©partition d'une de loi de Pareto de paramÃštres $3n$ et b. Or la fonction de rÃ©partition caractÃ©rise la loi d'une . On en dÃ©duit que Y_n suit la loi de Pareto de paramÃštres $3n$ et b. ☐

Montrer que $Y_n' = \dfrac{3n-1}{3n}\ Y_n$ est un estimateur sans biais de b.

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Proof.

La $Y_n' = \dfrac{3n-1}{3n}\ Y_n = \dfrac{3n-1}{3n}\ \min(X_1, \dots, X_n)$ s'exprime :

Ã l'aide d'un n-Ã©chantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la X,

sans mention du paramÃštre b. La Y_n' est donc un estimateur de b.

Comme $3n \geqslant 3 > 1$, d'aprÃšs la question 4.a), la Y_n admet une espÃ©rance.
Ainsi, la Y_n' admet une espÃ©rance (donc un biais) en tant que transformÃ©e linÃ©aire d'une qui en admet une.

De plus :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_n') &= \mathrm{E}\left(\frac{3n-1}{3n}\ Y_n\right) \\ &= \frac{3n-1}{3n}\ \mathrm{E}(Y_n) \qquad (parlinÃľaritÃľdel'espÃľrance)[-.2cm] = \frac{3n-1}{3n}\ \frac{3nb}{3n-1} \quad (d'aprÃšslesquestions\ 4.a)et5.b))[-.2cm] \\ &= b \end{aligned}$$

La Y_n' est donc un estimateur sans biais de b.

Comme $3n \geqslant 3 > 2$, d'aprÃšs la question 4.b), la Y_n admet une variance.
Ainsi, la Y_n' admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformÃ©e linÃ©aire d'une qui en admet une.

Par dÃ©composition biais-variance :

$$r_b(Y'_n) = (Y'_n) + \left(b_b(Y'_n)\right)^2$$
$$= (Y'_n) + 0 \qquad (car Y'_n \text{ est un estimateur sans biais de } b) \text{ [-.3cm]} =$$
$$\left(\frac{3n-1}{3n}\ Y_n\right)$$
$$= \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 (W_n)$$
$$= \frac{\cancel{(3n-1)^2}}{(3n)^2}\ \frac{3n\,b^2}{\cancel{(3n-1)^2}\,(3n-2)} \qquad (d'apr\text{Ã}šslesquestions4.a)et5.b))$$

□

Finalement : $r_b(Y'_n) = \dfrac{b^2}{3n\,(3n-2)}$

a)
DÃ©terminer l'espÃ©rance et la variance de Z_n.

Proof.

La Z_n admet une variance (donc une espÃ©rance) en tant que combinaison linÃ©aire de qui en admettent une.

De plus :

$$\mathrm{E}(Z_n) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\ \sum k = 1nX_k\right)$$
$$= \frac{1}{n}\ \sum k = 1n\mathrm{E}(X_k) \qquad (parlin\text{Ã}\text{l}'arit\text{Ã}\text{l}'del'esp\text{Ã}\text{l}'rance)[-.2cm] =$$
$$\frac{1}{n}\ \sum k = 1n\left(\frac{3\,b}{3-1}\right) \quad (d'apr\text{Ã}šs4.a))[-.2cm] = \qquad \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\ \frac{3}{2}\ b$$

Ainsi : $\mathrm{E}(Z_n) = \dfrac{3}{2}\ b$.

Enfin :

$$(V_n) = \left(\frac{1}{n}\ \sum k = 1nX_k\right)$$
$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\sum k = 1nX_k)$$
$$= \frac{1}{n^2}\ \sum k = 1n(X_k) \qquad (carles X_1, \ldots, X_n \text{ sont indÃ©pendantes) [-.2c}$$
$$\frac{1}{n^2}\ \sum k = 1n\frac{3\,b^2}{(3-1)^2\,(3-2)} \quad (d'apr\text{Ã}šs4.b))[-.2cm] = \qquad \frac{1}{\cancel{n^2}} \times \cancel{n}\ \frac{3}{}$$

□

On en dÃ©duit : $(Z_n) = \dfrac{3\,b^2}{4n}$.

En dÃ©duire un estimateur notÃ© Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ oÃ¹ α est un rÃ©el Ã prÃ©ciser.
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Proof.

D'aprÃšs la question prÃ©cÃ©dente :

$$\mathrm{E}(Z_n) = \frac{3}{2}\, b$$

$$donc \quad \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(Z_n) = b$$

$$d'oÃź \quad \mathrm{E}\left(\frac{2}{3}\, Z_n\right) = b \quad (parlinÃľaritÃľdel'espÃľrance)$$

On pose alors $\alpha = \dfrac{2}{3}$. La $Z'_n = \alpha\, Z_n = \dfrac{2}{3}\, Z_n$ s'exprime :

Ã l'aide d'un n-Ã©chantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la X,

sans mention du paramÃštre b. La $Z'_n = \dfrac{2}{3}\, Z_n$ est donc un estimateur de b.

La Z'_n admet une espÃ©rance (donc un biais) en tant que transformÃ©e linÃ©aire de la Z_n qui en admet une. De plus :

$$b_b(Z'_n) \;=\; b_b(\alpha\, Z_n) \;=\; \mathrm{E}(\alpha\, Z_n) - b \;=\; 0 \qquad \textit{(d'aprÃšs un point prÃ©cÃ©dent)}$$

La Z'_n est un estimateur sans biais de b.

La Z'_n admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformÃ©e linÃ©aire de la Z_n qui en admet une.

Par dÃ©composition biais-variance :

$$\begin{array}{rcl} r_b(Z'_n) & = & (Z'_n) + \left(b_b(Z'_n)\right)^2 \\ & = & (\alpha\, Z_n) + 0 \qquad (carZ'_n \text{ est un estimateur sans biais de } b) \text{ [-.2cm]} \quad = \\ \alpha^2\,(Z_n) & & \\ & = & \dfrac{4}{9}\,\dfrac{3\,b^2}{4n} \qquad (d'aprÃšslaquestionprÃľcÃľdente)[-.2cm] \quad = \\ \dfrac{b^2}{3n} & & \end{array}$$

$\square$

$r_b(Z'_n) = \dfrac{b^2}{3n}$

Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Proof.

Comme les estimateurs Y'_n et Z'_n de b sont tous les deux sans biais (questions 5.c) et 6.b)), le meilleur des deux est celui dont le risque quadratique est le plus faible.

Or, toujours d'aprÃšs 5.c) et 6.b) :

$$r_b(Y'_n) \leqslant r_b(Z'_n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2}{3n(3n-2)} \leqslant \frac{b^2}{3n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3n-2} \leqslant 1 \qquad (car\ \frac{3n}{b^2} > 0)\ \text{[-.2cm]} \quad \Leftrightarrow$$

$$3n-2 \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3n \geqslant 3$$

Cette derniÃšre inÃ©galitÃ© est vraie car $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, par Ã©quivalence, la 1 aussi. On en dÃ©duit que Y'_n est un meilleur estimateur de b que Z'_n.

Partie C : Estimation du paramÃštre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche Ã construire un intervalle de confiance pour a.

Ainsi, la variable alÃ©atoire X admet pour densitÃ© la fonction f dÃ©finie par :

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad si \text{x<1} [-.2cm] \frac{a}{x^{a+1}} \end{array} \right.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables alÃ©atoires indÃ©pendantes, toutes de mÃªme loi que X. 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.

Montrer que la variable alÃ©atoire W_n suit une loi exponentielle dont on prÃ©cisera le paramÃštre.

En dÃ©duire l'espÃ©rance et la variance de W_n.

Proof.

CommenÃ§ons par dÃ©terminer $W_n(\Omega)$.

Notons $h : x \mapsto \ln(x)$, de telle sorte que $W_n = h(X_n)$.

On considÃšre ici $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$. On en dÃ©duit :

$$\begin{array}{rcl} W_n(\Omega) & = & \big(h(X_n)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X_n(\Omega)\big) \\ & = & h([1,+\infty[) \\ & = & [h(1), \lim_{x \to +\infty} h(x)[\qquad (car la fonction h est continue et strictement croissante sur [1,+\infty[)\ \text{[-.2cm]} \ = \end{array}$$

$[0, +\infty[$

Et ainsi : $W_n(\Omega) = [0, +\infty[$.

DÃ©terminons la fonction de rÃ©partition F_{W_n} de W_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se prÃ©sentent :

si $x < 0$, alors $W_n \leqslant x = \emptyset$ (car $W_n(\Omega) = [0, +\infty[$). D'oÃ¹ :

$$F_{W_n}(x) = (W_n \leqslant x) = (\emptyset) = 0$$

si $x \geqslant 0$ alors :

$$F_{W_n}(x) = (W_n \leqslant x) = (\ln(X_n) \leqslant x) = (X_n \leqslant ^x) \quad (parstrictecroissancedelafonction \exp \text{ sur } \mathbb{R}) \text{ [-.2cm]} = F_{X_n}(^x)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^a \quad (car b=1 et, comme x \geqslant 0, ^x \geqslant 1) \text{ [-.2cm]} = 1-(^{-x})^a = 1-^{-ax}$$

On obtient finalement : $F_{W_n} : x \mapsto \{ \; 0 \quad si x<0 1-^{-ax}$.

On reconnaÃ®t la fonction de rÃ©partition d'une qui suit une loi a. Or la fonction de rÃ©partition caractÃ©rise la loi. On en dÃ©duit : $W_n a$ On en conclut : $\mathrm{E}(W_n) = \frac{1}{a}$ et $(W_n) = \frac{1}{a^2}$.
On dÃ©finit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a M_n - 1)$$

a)

Justifier que la suite de variables alÃ©atoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable alÃ©atoire suivant la loi normale centrÃ©e rÃ©duite.

Proof.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On cherche ici Ã appliquer le thÃ©orÃšme central limite. On commence donc par dÃ©terminer $\overline{W}_n^*$ et on souhaite relier cette Ã la T_n de l'Ã©noncÃ©.

IntÃ©ressons nous d'abord Ã la $M_n = \overline{W}_n$.

La M_n admet une variance (et donc une espÃ©rance) en tant que combinaison linÃ©aire de qui en admettent une.

De plus :

$$\mathrm{E}(M_n) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n} \sum k = 1 n W_k\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum k = 1 n \mathrm{E}(W_k) \quad (parlinÃľaritÃľdel'espÃľrance)[-.$$

$$\frac{1}{n} \sum k = 1 n \frac{1}{a} \quad (d'aprÃšslaquestionprÃľcÃľdente)[-.2cm] = \frac{1}{\cancel{n}} \times$$

Ainsi : $\mathrm{E}(M_n) = \frac{1}{a}$.

Enfin :

$$(M_n) \quad = \quad \left(\frac{1}{n} \sum k = 1nW_k\right)$$

$$= \quad \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\sum k = 1nW_k)$$

$$= \quad \frac{1}{n^2} \sum k = 1n(W_k) \qquad (car les W_1, \ldots, W_n \text{ sont indÃ©pe}$$

$$\frac{1}{n^2} \sum k = 1n\frac{1}{a^2} \quad (d'aprÃšslaquestionprÃl'cÃl'dente)[-.2cm] \quad =$$

D'oÃ¹ : $(M_n) = \dfrac{1}{n\,a^2}$.

Comme la $M_n = \overline{W}_n$ admet une variance non nulle, la $\overline{W}_n^*$ est bien dÃ©finie. De plus :

$$\overline{W}_n^* = \frac{\overline{W}_n - \mathrm{E}(\overline{W}_n)}{\sqrt{(\overline{W}_n)}}$$

$$= \frac{M_n - \frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{n\,a^2}}} \qquad (d'aprÃšscequiprÃl'cÃšde)[-.2cm] \quad =$$

$$\frac{M_n - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a\sqrt{n}}}$$

$$= a\sqrt{n}\left(M_n - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1)$$

On en dÃ©duit : $\overline{W}_n^* = T_n$.

La suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de :

indÃ©pendantes par lemme des coalitions (car la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de indÃ©pendantes),

de mÃªme loi a, □

qui admettent une variance non nulle ; $\frac{1}{a^2}$. Ainsi, par thÃ©orÃ¨me central limite : $T_n Z$, oÃ¹ $Z01$.

En dÃ©duire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}, \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0,975$, oÃ¹ Φ dÃ©signe la fonction de rÃ©partition d'une variable alÃ©atoire suivant la loi normale centrÃ©e rÃ©duite.

1

L'Ã©noncÃ© considÃšre ici : $M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$. En effet, dans la cas contraire, les $\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}$ et $\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}$ ne sont pas bien dÃ©finies.

Cette hypothÃšse n'est pas aberrante puisque, d'aprÃšs la question 8. : $W_n a$. Ainsi, on peut considÃ©rer : $W_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
Comme $M_n = \dfrac{1}{n} \sum k = 1 n W_k$, on en dÃ©duit : $M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
Pour une remarque plus complÃšte sur la notation $W_n(\Omega)$, on se reportera Ã la question 2.

Proof.
On cherche Ã dÃ©montrer :

$$n \longrightarrow +\infty \left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n} \right) \geqslant 95\%$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ãtudions d'abord la probabilitÃ©.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n} \right) \\ = \; & \left(\sqrt{n}-2 \leqslant a\sqrt{n}\,M_n \leqslant \sqrt{n}+2 \right) \qquad (car \sqrt{n} > 0 \text{ et } M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[) \text{ [-.2cm]} = \; \left(-2 \leqslant a\sqrt{n}\,M_n - \sqrt{n} \leqslant 2 \right) \\ = \; & \left(-2 \leqslant \sqrt{n}\,(a M_n - 1) \leqslant 2 \right) \\ = \; & (-2 \leqslant T_n \leqslant 2) \end{aligned}$$

Or, d'aprÃšs la question prÃ©cÃ©dente : $T_n Z$, oÃ¹ $Z 0 1$. D'oÃ¹ :

$$\begin{aligned} n \longrightarrow +\infty(-2 \leqslant T_n \leqslant 2) &= (-2 \leqslant Z \leqslant 2) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) \qquad (car Z\,0\,1)[-.2cm] = \\ \Phi(2) - \left(1 - \Phi(2)\right) & \\ &= 2\,\Phi(2) - 1 \end{aligned}$$

De plus, d'aprÃšs l'Ã©noncÃ© :

$$\begin{aligned} & \Phi(2) \geqslant 0,975 \\ donc \quad & 2\,\Phi(2) \geqslant 1,95 \\ d'oÃź \quad & 2\,\Phi(2) - 1 \geqslant 0,95 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$n \longrightarrow +\infty \left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n} \right) \geqslant 95\%$$

On en dÃ©duit que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \,;\, \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%. $\square$