ECG2 - 2023-2024

DS n°3
Mathématiques
CORRECTION

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
. les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
. les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1

1. (a)
   - **Positivité** Remarquons d'abord que la fonction f est clairement positive sur $\mathbb{R}$.
   - **Continuité** La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme composée des fonction $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto e^x$. La fonction f est donc continue sur $[0,+\infty[$ comme produit de la fonction précédente par x. La fonction f est également continue sur $]-\infty,0[$ car constante. Nous en déduisons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (Cela suffit pour montrer que f est une densité).
   - **Intégrale** Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$, on a:
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$
   Soit $x \in [0,+\infty]$. On a:
   $$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1.$$
   On a alors:
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 = 1.$$

   La fonction f peut donc être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.

   (b) Soit N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée, réduite. On a $E(N) = 0$ et $V(N) = 1$. D'après le théorème de Koenig-Huygens, comme N admet une variance elle admet également un moment d'ordre deux et on a
   $$E(N^2) = E(N)^2 + V(N) = 1.$$

   (c) Pour montrer que X admet une espérance, il faut montrer que:
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
   est une intégrale convergente. D'après la question précédente, on sait que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}E(N^2) = \sqrt{2\pi}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$. Remarquons que la fonction g est paire. On a donc, en faisant le changement de variable $t = -u$:
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x g(t)dt = -\int_0^{-x} g(-u)du = \int_{-x}^0 g(u)du.$$
   On a donc:
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-x}^x g(t)dt = \int_{-x}^0 g(t)dt + \int_0^x g(t) = 2\int_0^x g(t)dt.$$
   En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient:
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 2\int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

   On en déduit que X admet une espérance et que:
   $$E(X) = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. D'après le cours, on a:
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$
   Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$, $F_X(x)$ est nulle si $x < 0$. Si $x \geqslant 0$, on a, en reprenant les calculs de la question **1)a)**:
   $$F_X(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Ainsi on a:
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. (a) Si $x<0$, on a $F_Z(x)=P(X^2\leqslant x)=0$ car X^2 ne peut pas prendre de valeurs négatives. Si $x\geqslant 0$, on a:

$$F_Z(x)=P(X^2\leqslant x)=P(-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant \sqrt{x})=F_X(\sqrt{x})-F_X(-\sqrt{x})=F_X(\sqrt{x})=1-e^{-\frac{x}{2}}.$$

On en déduit que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

(b)

```
def simulX() :
    Z = rd.exponential(1/2)
    return np.sqrt(Z)
```

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On a

$$G_n(x)=P(Y_n\leqslant x)=P\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=P(X\leqslant\sqrt{n}x)=F_X(\sqrt{n}x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}.$$

5. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. et $n\in\mathbb{N}^*$. Remarquons que $[M_n>x]=\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i>x]$. Comme les variables $(X_1,\dots,X_n)$ sont supposées mutuellement indépendantes, on a:

$$P(M_n>x)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i>x]\right)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x).$$

Comme les variables $X_1,\dots,X_n$ suivent toutes la même loi que X, on peut écrire :

$$P(M_n>x)=P(X>x)^n=(1-F_X(x))^n.$$

On a alors:

$$F_{M_n}(x)=1-P(M_n>x)=1-(1-F_X(x))^n=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}=G_n(x).$$

Les variables M_n et Y_n ayant la même fonction de répartition, elles suivent la même loi.

```
def simulM(n) :
    X = np.array([simulX() fo k in range (n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

(c)

```
def simulM(n) :
    X = [ simulX() for _ in range(n) ]
    M = np. min(X)
    return M
```

(d) Le graphique représente les deux histogrammes des fréquences associés à la simulation de `nbsim=10 000` fois la variable Y_{1000} pour le premier histogramme et `nbsim=10 000` fois la variable M_{1000} pour le second. La forme identique des histogrammes met en évidence le fait que ces deux variables ont la même loi (comme démontré précédement).

Exercice 2

1. (a) Soit $x \in [0,1]$, et a, b les réels vérifiant l'égalité de l'énoncé. On a:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x)+b(2-x)}{4-x^2} = \frac{2(a+b)+(a-b)x}{4-x^2}.$$

Par identification des coefficients, on a $a-b=0$ et $2(a+b)=1$. On vérifie qu'on a alors $a=b=\frac{1}{4}$.

(b) En utilisant la question précédente, on a:

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4(2-x)}dx + \int_0^1 \frac{1}{4(2+x)}dx \\ &= \frac{1}{4}\left([-\ln(2-x)]_0^1 + [\ln(2+x)]_0^1\right) \\ &= \frac{\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)}{4} \\ &= \frac{\ln(3)}{4}. \end{aligned}$$

2. Pour calculer u_1, il suffit de remarquer qu'une primitive de $\frac{x}{4-x^2}$ est la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto -\frac{\ln(4-x^2)}{2}$. On a donc:

$$u_1 = \left[-\frac{\ln(4-x^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{-\ln(3)+\ln(4)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3. (a) Pour tout entier n, on a:

$$\begin{aligned} 4u_n - u_{n+2} &= \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a pour tout entier n : $u_{n+2} = 4u_n - \frac{1}{n+1}$. Le programme calcule les termes de u_n par récurrence en incrémentant n de 2 à chaque étape.
Si n est pair, on calcule u_n en utilisant la formule de récurrence et en partant de u_0. Si n est impair, on fait de même en partant de u_1.

```python
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(n-1)
    else :
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(n-1)
    return u
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a:

$$3 \leqslant 4-x^2 \leqslant 4$$

Par décroissance de la fonction inverse puis en multipliant par $x^n \in [0,1]$, on obtient:

$$\frac{x^n}{4} \leqslant \frac{x^n}{4-x^2} \leqslant \frac{x^n}{3}.$$

Par positivité de l'intégrale, on a donc:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{3}\,dx.$$

On en déduit que:

$$\frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}.$$

(b) La suite (u_n) est encadrée par les suites $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers 0. D'après le théorème d'encadrement, on conclut que la suite (u_n) converge aussi vers 0.

(c) D'après la question **4)a)**, la suite (u_n) est minorée par la suite $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, $\frac{1}{4(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n}$ qui est le terme général d'une série divergente. Par comparaison de séries à terme positifs on en déduit que $\sum \frac{1}{4(n+1)}$ puis $\sum u_n$ divergent.

5. (a) Ce programme affiche les points de coordonnées $(n, 3nu_n)$ pour n allant de 0 à 40. On voit que l'ordonnée des points s'approche de 1 et on conjecture donc que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 3nu_n = 1$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.

(b) Soit f et g les fonctions définies sur $[0,1]$ par:

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et leurs dérivées sont données par:

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = x^n.$$

D'après la formule d'intégration par partie, on a alors:

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)}\right]_0^1 - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx. \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En procédant de la même matière qu'à la question **4)a)**, on peut montrer que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9}\,dx.$$

On a alors:

$$\frac{1}{16(n+3)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leqslant \frac{1}{9(n+3)}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ est encadrée par des termes qui convergent vers 0, on peut conclure que:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0$$

6. On a:

$$3nu_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

- Le terme $\frac{3n}{3(n+1)}$ converge vers 1.
- Le terme $\frac{6n}{(n+1)}$ converge vers 6 donc par produit et d'après la question précédente, le terme $\frac{6n}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ converge vers 0.

On en déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 3nu_n = 1$ et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ conformément à la conjecture de la question **5)a)**.

Problème

Partie I : réduction d'une matrice

1. On a
$$M^2=\begin{pmatrix}\frac14&\frac12&\frac14\\ \frac18&\frac34&\frac18\\ \frac14&\frac12&\frac14\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac14&\frac12&\frac14\\ 0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14&\frac12&\frac14\\ \frac18&\frac34&\frac18\\ \frac14&\frac12&\frac14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac18&\frac34&\frac18\\ \frac{3}{16}&\frac58&\frac{3}{16}\\ \frac18&\frac34&\frac18\end{pmatrix}.$$
On vérifie alors l'égalité de l'énoncé:
$$M^2+M=\begin{pmatrix}\frac14&\frac12&\frac14\\ \frac18&\frac34&\frac18\\ \frac14&\frac12&\frac14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac14&\frac12&\frac14\\ 0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14&\frac32&\frac14\\ \frac38&\frac54&\frac38\\ \frac14&\frac32&\frac14\end{pmatrix}=2M^3.$$
On en déduit que le polynôme $\boxed{p(x)=2x^3-x^2-x}$ est annulateur de M.

2. L'instruction Python donne le rang de la matrice $M-I_3$. Le résultat étant 2, on en déduit que 1 est une valeur propre de M et donc une racine de p.
Factorisons p : $\boxed{p(x)=x(x-1)(2x+1)}$ dont les racines sont donc $\left\{-\frac12,0,1\right\}$.

3. D'après les cours : $Sp(M)\subset\left\{-\frac12,0,1\right\}$.
Il reste alors à vérifier si chacune des racines λ de p est valeur propre ou pas de M.

   - **Cas $\lambda=-\dfrac12$.** Déterminons le rang de $M+\dfrac12 I_3=\begin{pmatrix}\frac12&1&0\\ \frac14&1&\frac14\\ 0&1&\frac12\end{pmatrix}$. Notons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de la matrice. On remarque qu'on a $L_1+L_3=2L_2$ sans pour autant que les trois lignes soient colinéaires. On en déduit que $\mathrm{rg}(M+\dfrac12 I_3)=2$, que $rg\left(M+\dfrac12 I_3\right)=2<3$ et donc que $-\frac12$ est une valeur propre de M.
   - **Cas $\lambda=0$.** Déterminons le rang de $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac14&\frac12&\frac14\\ 0&1&0\end{pmatrix}$. La première et la troisième ligne sont égales et ne sont pas colinéaires à la seconde, on a donc $\mathrm{rg}(M)=2$. La matrice M n'est donc pas inversible et 0 est une valeur propre de M.
   - **Cas $\lambda=1$.** Ce cas a déjà été déterminé par la sortie Python mais vérifions le par le calcul.
   Déterminons le rang de $M-I_3=\begin{pmatrix}-1&1&0\\ \frac14&-\frac12&\frac14\\ 0&1&-1\end{pmatrix}$. Remarquons qu'on a $L_1+L_3=-4L_2$ sans que les trois lignes soient colinéaires, on a donc $\mathrm{rg}(M-I_3)=2$. La matrice $M-I_3$ n'est donc pas inversible ce qui prouve que 1 est valeur propre de M.

Ccl : $\boxed{Sp(M)=\left\{-\frac12,0,1\right\}}$.

Remarque : De plus pour chaque valeur propre λ, on a montré que $\mathrm{rg}(M-\lambda I_3)=2$. D'après le théorème du rang, cela implique que $\dim(E_\lambda(M))=1$. Ainsi pour trouver une base de chaque sous-espace propre, il suffit de trouver un vecteur propre.

   - **Base de $E_{-\frac12}$.** Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-\frac12}$. Le triplet (x,y,z) est alors solution du système
$$\begin{cases}\frac{x}{2}+y=0\\ \frac{x}{4}+y+\frac{z}{4}=0\\ y+\frac{z}{2}=0\end{cases}$$
   On laisse au lecteur le soin de vérifier que les solutions de ce système sont de la forme $\begin{pmatrix}-2y\\y\\-2y\end{pmatrix}$ où $y\in\mathbb{R}$. Une base de $E_{-\frac12}$ est donc donné par $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$.

- **Base de** E_0. De même une base de E_0 est donnée par $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

  Remarque : on aurait pu prendre comme base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ *mais ce vecteur ne correspond pas avec la demande faite sur la 2ème ligne de P de la question suivante. On a donc modifié directement ce vecteur ici.*

- **Base de** E_1. De même une base de E_1 est donc donnée par $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

4. D'après le principe de concaténation, la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une famille libre de trois vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.
   <u>La matrice M est donc diagonalisable.</u>
   Par conséquent la matrice $P = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ est une matrice inversible en tant que matrice de passage d'une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une autre.
   De plus, d'après la formule du changement de base on a $\boxed{M = PDP^{-1}}$ où $D = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5. Par une récurrence (à faire le jour J) nous en déduisons sans difficulté :$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

6. **Déterminons** P^{-1} **:** soit $X =$ et $Y =$.

$$PX = Y \iff \begin{cases}2x-y+z &= a\\-x+z &= b\\2x+y+z &= c\end{cases} \iff \begin{cases}2x-y+z &= a\\-x+z &= b\\-2y &= a-c\end{cases} \iff \begin{cases}2x+z &= \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c\\-x+z &= b\\y &= -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3x &= \frac{1}{2}a-b+\frac{1}{2}c\\-x+z &= b\\y &= -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c\end{cases} \iff \begin{cases}x &= \frac{1}{6}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c\\-x+z &= b\\y &= -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c\end{cases} \iff \begin{cases}x &= \frac{1}{6}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c\\y &= -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c\\z &= \frac{1}{6}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{6}c\end{cases}$$

   On en déduit donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.}$

   Deuxième ligne de M^n **:** pour déterminer la deuxième ligne d'une matrice il suffit de la multiplier à gauche par $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}M^n &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 1\\-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 1\\2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3} & \frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   <u>Ccl :</u> on retrouve bien le fait que la 2ème ligne de M^n est $\boxed{\begin{pmatrix}\dfrac{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}{6} & \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2}{3} & \dfrac{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}{6}\end{pmatrix}}$.

Partie II : étude d'une chaîne de Markov

1. (a) La variable X_0 correspond au nombre de boules blanches présentes dans A initialement. D'après l'énoncé, on a $X_0 = 1$ et donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

   Ccl : On a $\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

   (b) Comme il peut y avoir 0,1 ou 2 boules blanches, on a $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   - On a $X_1 = 0$ si et seulement si au premier tirage, on a tiré une boule blanche dans l'urne A et une boule noire dans l'urne B. Chaque tirage étant indépendant, on a :

   $$a_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

   - On a $X_1 = 2$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule noire dans l'urne A et une boule blanche dans l'urne B. Chaque tirage étant indépendant, on a :

   $$c_1 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

   - Comme $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $([X_1 = 0], [X_1 = 1], [X_1 = 2])$, est un système complet d'évènement et on a donc:

   $$b_1 = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

   Ccl : La loi de X_1 est donnée par $\boxed{\begin{cases} P(X_1 = 0) & = \frac{1}{4} \\ P(X_1 = 1) & = \frac{1}{2} \\ P(X_1 = 2) & = \frac{1}{4} \end{cases}}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise les même arguments que précédemment: il y a dans l'urne 0,1 ou 2 boules blanches donc on a $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. D'après le cours, $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est donc un système complet d'évènements.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'évènement, on a:

   $$a_n + b_n + c_n = P([X_n = 0]) + P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) = 1.$$

   Ccl : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n + c_n = 1}$.

2. (a) Fonction `tirage(n,b)` :

```python
def tirage(n,b):
    if rd.random()<n/(n+b):
        return 1
    else:
        return 0
```

   (b) Fonction `simulX(n)` :

```python
def simulX(n):
    nA,bA=1,1
    nB,bB=1,1
    for _ in range(n):
        tirageA=tirage(nA,bA)
        tirageB=tirage(nB,bB)
        if tirageA== 0 and tirageB == 1 :
            bA=bA-1
            nA=nA+1
            bB=bB+1
            nB=nB-1
        elif tirageA==1 and tirageB ==0:
            bA=bA+1
            nA=nA-1
            bB=bB-1
            nB=nB+1
    return nA
```

(c) Sur 100 simulations de la variable X_n on peut constater que le vecteur ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ représente les fréquences des événements $(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)$.

Autrement dit :

Conjecture : $\begin{cases} P(X_n = 0) = \dfrac{1}{6} \\ P(X_n = 1) = \dfrac{2}{3} \\ P(X_n = 2) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Supposons que l'évènement $(X_n = 0)$ soit réalisé. Dans ce cas l'urne A contient deux boules noires et l'urne B contient forcément deux boules blanches. Le tirage va donc forcément aboutir à ce que chaque urne contienne une boule noire et une boule blanche. On a donc:

- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$.
- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

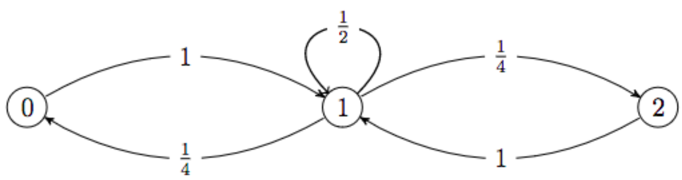
Supposons maintenant que l'évènement $(X_n = 1)$ soit réalisé. On est alors dans la même situation qu'avant le premier tirage. On a donc:

- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{4}$.
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$.
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{4}$.

Supposons maintenant que l'évènement $[X_n = 2]$ soit réalisé. On est alors dans une situation symétrique à celle où $[X_n = 0]$, où les rôles des boules noires et des boules blanches sont inversées. On a alors:

- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

(b) Ces probabilités correspondent aux poids des arêtes du graphe suivant :



(c) D'après la question **1)c)** , $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'évènement. On peut alors utiliser la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) \\ &= \frac{b_n}{4}. \\ b_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \\ &= a_n + \frac{b_n}{2} + c_n. \\ c_{n+1} &= P(X_{n+1} = 2) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) \\ &= \frac{b_n}{4}. \end{aligned}$$

<u>Ccl :</u> on obtient donc les relations: $\boxed{\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{b_n}{4} \\ b_{n+1} &= a_n + \dfrac{b_n}{2} + c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{b_n}{4} \end{cases}}$

4. Rappelons qu'on a $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$ et $(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Vérifions les relations de la question précédente:

- $\dfrac{b_0}{4} = \dfrac{1}{4} = a_1 = c_1$,
- $a_0 + \dfrac{b_0}{2} + c_0 = \dfrac{1}{2} = b_1$.

Ccl : Les relations de la question précédente sont donc bien vérifiées pour $n = 0$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$U_nM = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_n}{4} & a_n + \frac{b_n}{2} + c_n & \frac{a_n}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

Ccl : on a bien la relation : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1}U_nM}$.

(b) Montrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $U_0M^0 = U_0I_3 = U_0$. L'égalité est bien vérifiée.
- **Hérédité.** Soit n un entier tel que $U_n = U_0M^n$. Alors, en utilisant la question précédente, on a:

$$U_{n+1} = U_nM = U_0M^nM = U_0M^{n+1}.$$

- **Conclusion.** L'égalité est vraie pour $n = 0$ et l'hérédité a été démontrée, on a donc bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = U_0M^n}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de a_n, b_n et c_n, la loi de X_n est donnée par les coefficients de U_n.
Il suffit donc de calculer $U_0.M^n$ ce qui revient au calcul de la 2ème ligne de M^n calculée dans la question **Partie I 6.**.
On a donc

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{-(-\frac{1}{2})^n+1}{6} & \frac{(-\frac{1}{2})^n+2}{3} & \frac{-(-\frac{1}{2})^n+1}{6} \end{pmatrix}$$

Ccl : la loi de X_n est donnée par : $\boxed{\begin{cases} P(X_n = 0) &= \dfrac{-(-\frac{1}{2})^n + 1}{6} \\ P(X_n = 1) &= \dfrac{(-\frac{1}{2})^n + 2}{3} \\ P(X_n = 2) &= \dfrac{-(-\frac{1}{2})^n + 1}{6} \end{cases}}$.

(d) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc on en déduit :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) &= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-(-\frac{1}{2})^n + 1}{6} = \dfrac{1}{6} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) &= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-\frac{1}{2})^n + 2}{3} = \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2) &= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-(-\frac{1}{2})^n + 1}{6} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

(e) La fonction suivante renvoie un vecteur ligne contenant la loi de X_n :

```
def loiX(n):
    a,b,c= 0 , 1 , 0
    U=np.array([[a,b,c]])
    M=np.array([[0,1,0],[1/4,1/2,1/4],[0,1,0]])
    for _ in range(n):
        U = np.dot( U , M )
    return U
```

Pour représenter graphiquement ces trois suites pour n allant de 0 à 25 donne le script suivant :

```

n=25
a=[loiX(k)[ 0 , 0] for k in range(n)]
b=[loiX(k)[ 0 , 1]  for k in range(n)]
c=[loiX(k)[ 0 , 2]  for k in range(n)]

plt.plot( a ,'.')
plt.plot( b ,'+')
plt.plot( c ,'o')
plt.show()
```

(f) Le graphique met en évidence la convergence des suites $a_n = c_n$ et b_n. Nous ne voyons que 2 suites sur 3 justement puisque les suites a_n et c_n sont égales.