ECG2 - 2023-2024

DS N°3 KHÛBES
MATHÉMATIQUES
(4H)

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
. les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
. les questions de chaque exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : EDHEC 2023

1. Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0;1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x - y| \qquad (*)$$
On considède pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente. On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$
   (b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.
   (c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5. On désigne par n et p des entiers naturels, avec $p \geqslant 1$.
   (a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.
   (b) En déduire l'inégalité :
   $$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K}|u_1 - u_0|$$
   (c) Établir enfin l'inégalité suivante :
   $$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|$$

6. **Étude d'un exemple :** on considère la fonction f définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+e^t}$$
   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t.
   (b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$$
   (c) En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.
   (d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.
   (e) Compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```python
def suite(n):
    u=------
    for k in range(1,n+1):
        u=------
    return u
```

   (f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5.(c), établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant \dfrac{2000}{3}$.
   (g) En déduire un programme `Python`, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 2 : EDHEC 2023

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.
   (b) En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

   (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

   (b) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.

   (d) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

3. On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivante la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

   (a) Établir l'égalité :

   $$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$

   (b) En déduire explicitement $P(X = Y)$.

4. Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la probabilité p pour que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.

   (b) On considère le script `Python` suivant :

```python
m=int(input("Entrez une valeur entiere pour m : "))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

   Pour de grandes valeurs de l'entier naturel `m`, de quel réel le contenu de la variable `i` est-il proche ?

Exercice 3 : HEC 2019

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = [1, 2, -1] \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

   (a) i. Calculer M et M^2.

   ii. Déterminer le rang de M.

   iii. La matrice M est-elle diagonalisable ?

   (b) i. Soit $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer le produit $P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   ii. Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   iii. Pour une telle matrice Q, calculer le produit PMQ.

2. La fonction Python suivante permet de multiplier la i-ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```
def multligne(a,i,A):
  [n,p] = size(A)
  B = A
  for j in. range(1,p+1):
    B[i,j]=a*B[i,j]
  return B
```

   (a) Donner le code Python de deux fonctions `addligne(b, i, j, A)` et `echligne(i,j,A)` permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :
$$L_i \leftarrow L_i + b_i(i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j(i \neq j).$$

   (b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
def multligmat(a,i,A):
  [n,p] = size(A)
  D = np.eye(n,n)
  D(i,i) = a
  B = np.dot(D,A)
  return B
```

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

   Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne, qui vaut 1.

   (a) i. Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice-ligne non nulle $L = [\ell_1, \ldots, \ell_n] \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

   ii. Calculer la matrice MC et en déduire une valeur propre de M.

   iii. Montrer que si le réel $\sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

   (b) i. À l'aide de l'égalité $M = CL$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = E_{1,1}$.

   ii. En déduire que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.

Exercice 4 : HEC 2020 Partie 1

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé, à densité et indépendantes.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

On suppose que Y est à valeurs positives et possède une densité f_Y dont la restriction à $[0,+\infty[$ est continue sur cet intervalle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $H(x) = \mathbb{P}([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x])$

1. (a) Montrer que H est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ qui admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) En utilisant la suite $(H(n))_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} H(x) = \mathbb{P}([X \leqslant Y])$.
   Que vaut $H(0)$?

2. Soit (u, v) un couple de réels positifs tels que $u < v$.

   (a) Montrer que $H(v) - H(u) = \mathbb{P}([X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v])$ puis que :
   $$F_X(u)\frac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u} \leqslant \frac{H(v)-H(u)}{v-u} \leqslant F_X(v)\frac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u}$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, H est dérivable en x et $H'(x) = F_X(x)f_Y(x)$.
   (c) En conclure que pour tout x réel positif, $H(x) = \displaystyle\int_0^x F_X(t)f_Y(t)\,t$.

3. Montrer que $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)f_Y(t)$ dt.

4. En utilisant la fonction $K : x \mapsto \mathbb{P}([X < Y] \cap [Y \leqslant x])$, on montrerait de même et nous l'admettrons que :
   $$\mathbb{P}([X < Y]) = \int_0^{+\infty} F_X(t)f_Y(t)\,dt = \mathbb{P}([X \leqslant Y])$$
   Que peut-on en déduire pour $\mathbb{P}([X = Y])$?

5. **Application aux lois exponentielles :**
   On suppose que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.
   Soit θ un réel positif ou nul.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = U - \theta$.
   (b) En déduire que pour tout $\theta \geqslant 0$,
   $$P([U-\theta \leqslant V]) = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda\theta}$$